الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2013
الموضوع

NS22

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعب(ة) أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	المعامل	7

معلومات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- مدة إنجاز موضوع الامتحان : 3 ساعات ؛
- عدد الصفحات : 3 صفحات (الصفحة الأولى تتضمن معلومات والصفحتان المتبقيتان تتضمنان تمارين الامتحان)؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- في حالة عدم تمكن المترشح من الإجابة عن سؤال ما ، يمكنه استعمال نتيجة هذا السؤال لمعالجة الأسئلة الموالية ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

معلومات خاصة

- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين	المجال	النقطة الممنوحة
التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الرابع	المتتاليات العددية	3 نقط
التمرين الخامس	دراسة دالة وحساب التكامل	8 نقط

الموضوع

التمرين الأول (3ن)

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، النقط $A(-1,1,0)$ و $B(1,0,1)$ و $\Omega(1,1,-1)$ و الفلكة (S) التي مركزها Ω وشعاعها 3

1 **1)** أ- بين أن $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ و تحقق من أن $x+y-z=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

1 ب- تحقق من أن $d(\Omega,(OAB))=\sqrt{3}$ ثم بين أن (OAB) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $\sqrt{6}$

2) ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (OAB)

0.5 أ- بين أن : $(t\in I\!R)$ $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=-1-t \end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ)

0.5 ب- حدد مثلوث إحداثيات مركز الدائرة (Γ)

التمرين الثاني (3ن)

نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث : $a=7+2i$ و $b=4+8i$ و $c=-2+5i$

0.75 **1)** أ- تحقق من أن $(1+i)(-3+6i)=-9+3i$ و بين أن $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$

1 ب- استنتج أن $AC=AB\sqrt{2}$ وأعط قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

2) ليكن R الدوران الذي مركزه B و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

0.75 أ- بين أن لحق النقطة D صورة النقطة A بالدوران R هو $d=10+11i$

0.5 ب- احسب $\dfrac{d-c}{b-c}$ و استنتج أن النقط B و C و D مستقيمية .

التمرين الثالث (3ن)

يحتوي صندوق على 10 كرات : خمس كرات حمراء وثلاث كرات خضراء وكرتان بيضاوان (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .

نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من الصندوق .

1.5 **1)** نعتبر الحدثين التاليين : A : " الحصول على كرتين حمراوين و كرتين خضراوين "

B : " لا توجد أية كرة بيضاء من بين الكرات الأربع المسحوبة "

بين أن $P(A)=\dfrac{1}{7}$ و $P(B)=\dfrac{1}{3}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المسحوبة .

0.25 أ- تحقق من أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2

1.25 ب- بين أن $P(X=1)=\dfrac{8}{15}$ ثم حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X

التمرين الرابع (3ن)

لتكن $(u_n)_{n\in IN^*}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_1=0$ و $u_{n+1}=\dfrac{25}{10-u_n}$ لكل n من IN^*

1) تحقق من أن $5-u_{n+1}=\dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ لكل n من IN^* و بين بالترجع أن $5-u_n>0$ لكل n من IN^* | 1

2) نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in IN^*}$ المعرفة بما يلي : $v_n=\dfrac{5}{5-u_n}$ لكل n من IN^*

أ- بين أن $v_{n+1}=\dfrac{10-u_n}{5-u_n}$ لكل n من IN^* ثم تحقق من أن $v_{n+1}-v_n=1$ لكل n من IN^* | 0.75

ب- بين أن $v_n=n$ لكل n من IN^* و استنتج أن $u_n=5-\dfrac{5}{n}$ لكل n من IN^* | 1

ج- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | 0.25

التمرين الخامس (8 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=(x-2)^2 e^x$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1\,cm$)

1) أ - بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ | 0.25

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل، بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه. | 0.5

2) أ - تحقق من أن $f(x)=x^2e^x-4xe^x+4e^x$ لكل x من IR | 0.25

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و أول هذه النتيجة هندسيا (نذكر أن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$ لكل n من IN^*) | 0.5

3) أ- بين أن $f'(x)=x(x-2)e^x$ لكل x من IR | 0.75

ب- بين أن الدالة f تزايدية على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[2,+\infty[$ وأن الدالة f تناقصية على المجال $[0,2]$ | 1

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على IR | 0.5

4) أ- بين أن $f''(x)=(x^2-2)e^x$ لكل x من IR ثم استنتج أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف تحديد أرتوبيهما غير مطلوب . | 1

ب- أنشئ (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ | 1

5) أ- بين أن $H:x\mapsto(x-1)e^x$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto xe^x$ على IR ثم احسب $\int_0^1 xe^x\,dx$ | 0.5

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: $\int_0^1 x^2e^x\,dx=e-2$ | 0.75

ج- بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$ هي $5(e-2)\ cm^2$ | 0.5

6) استعمل المنحنى (C) لإعطاء عدد حلول المعادلة : $x^2=e^{-x}+4x-4$, $x\in IR$ | 0.5

أجوبة امتحان الدورة العادية 2013

التمرين الأول

1 أ

لدينا : $\begin{cases} A(-1;1;0) \\ B(1;0;1) \\ O(0;0;0) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{OA}(-1;1;0) \\ \overrightarrow{OB}(1;0;1) \end{cases}$

و منه :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k} \end{aligned}$$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستوى (OAB) .

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ متجهة منظمية على المستوى (OAB) .

إذن فهي عمودية على جميع متجهات المستوى (OAB)

إذن المتجهتان $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ متعامدتان

يعني ، باستعمال الجداء السلمي : $\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = 0$

أي : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ يعني : $x + y - z = 0$

و هذه الكتابة الأخيرة تميز نقط المستوى (OAB)

إذن فهي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) .

1 ب

لدينا $\Omega(1;1;-1)$ و $(OAB) : x + y - z = 0$

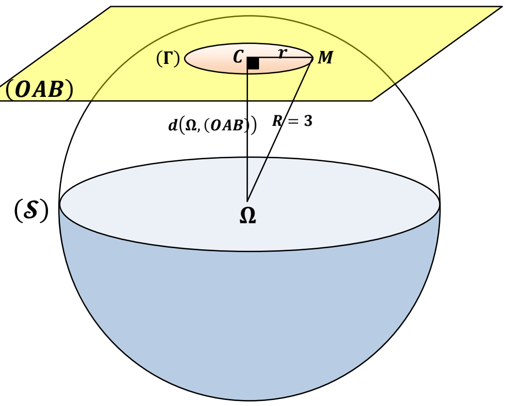
إذن : $d(\Omega, (OAB)) = \dfrac{|1 + 1 - (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

و نعلم أن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها Ω و شعاعها $R = 3$.

نلاحظ إذن أن : $\sqrt{3} < 3$ يعني : $d(\Omega, (OAB)) < Rayon(\mathcal{S})$

إذن المستوى (OAB) يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) مركزها $C(\alpha;\beta;\gamma)$ و شعاعها r .

لتحديد قيمة الشعاع r نستعين بالشكل التالي :



من خلال هذا الشكل نلاحظ أن : $(\Omega C) \perp (OAB)$ إذن : $(\Omega C) \perp (CM)$

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة فيتاغورس في المثلث ΩCM القائم الزاوية في C

إذن : $\Omega M^2 = \Omega C^2 + CM^2$

يعني : $3^2 = (\sqrt{3})^2 + r^2$ يعني : $r = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$

2 أ

ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω و العمودي على المستوى (OAB) .

و لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) .

بما أن (Δ) عمودي على (OAB) و $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ منظمية على (OAB)

فإن أي متجهة موجهة لـ (Δ) تكون مستقيمية مع المتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

لدينا $\overrightarrow{\Omega M}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) .

إذن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ مستقيميتان .

يعني : $\overrightarrow{\Omega M} = t(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB})$; $(\exists t \epsilon \mathbb{R})$

أي : $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $(\exists t \epsilon \mathbb{R})$

يعني : $(\Delta) : \begin{cases} x - 1 = t \\ y - 1 = t \\ z + 1 = -t \end{cases}$; $(t \epsilon \mathbb{R})$

يعني : $\boxed{(\Delta) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t - 1 \end{cases} ; (t \epsilon \mathbb{R})}$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

2 ب

بما أن (Δ) مار من Ω و عمودي على (OAB) فإن (Δ) و (ΩC) منطبقان

يعني : $C(\alpha;\beta;\gamma) \,\epsilon\, (\Delta)$

و لدينا من جهة ثانية : $C(\alpha;\beta;\gamma) \,\epsilon\, (OAB)$

نحصل إذن على النظمة التالية : $\begin{cases} C(\alpha;\beta;\gamma) \,\epsilon\, (\Delta) \\ C(\alpha;\beta;\gamma) \,\epsilon\, (OAB) \end{cases}$

و نعلم أن : $\begin{cases} (\Delta) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t - 1 \end{cases} ; (t \epsilon \mathbb{R}) \\ (OAB) : x + y - z = 0 \end{cases}$

إذن نعوض x و y و z بالمجاهيل α و β و γ نجد : $\begin{cases} \alpha = 1 + t \\ \beta = 1 + t \\ \gamma = -1 - t \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$

نعوض بعد ذلك α و β و γ بالتعابير التي تضم البارامتر t في آخر معادلة

نجد : $(1 + t) + (1 + t) — (-1 - t) = 0$

و نحل هذه المعادلة الظريفة من الدرجة الأولى بمجهول واحد نجد :

$3t + 3 = 0$ أي : $t = -1$

نعوض t بالقيمة -1 في تعابير α و β و γ نجد : $\begin{cases} \alpha = 1 - 1 = 0 \\ \beta = 1 - 1 = 0 \\ \gamma = -1 + 1 = 0 \end{cases}$

إذن النقطة C التي نبحث عنها ما هي إلا O أصل المعلم .

و بالتالي (Γ) دائرة مركزها O أصل المعلم .

التمرين الثاني

1 أ

$$(1 + i)(-3 + 6i) = -3 + 6i - 3i - 6 = -9 + 3i$$

الهدف من هذه المتساوية هو توظيفها أثناء حساب $\dfrac{c - a}{b - a}$

$$\begin{aligned} \frac{c - a}{b - a} &= \frac{(-2 + 5i) - (7 + 2i)}{(4 + 8i) - (7 + 2i)} = \frac{-9 + 3i}{-3 + 6i} \\ &= \frac{(1 + i)(-3 + 6i)}{(-3 + 6i)} = (1 + i) \end{aligned}$$

1 ب

لدينا : $\frac{c-a}{b-a} = 1+i$ إذن : $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |1+i|$

يعني : $\frac{|c-a|}{|b-a|} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

إذن : $|c-a| = \sqrt{2}\cdot|b-a|$

أي : $AC = \sqrt{2}\cdot AB$

من جهة ثانية ، لدينا : $\frac{c-a}{b-a} = 1+i$

لنكتب العدد العقدي $(1+i)$ على الشكل المثلثي :

$$\begin{aligned}(1+i) &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\end{aligned}$$

إذن : $\frac{c-a}{b-a} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

و منه : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\ [2\pi]$

يعني : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

أي : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

إذن $\frac{\pi}{4}$ قياس للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

2 أ

لدينا الدوران $\mathcal{R}$ معرف بما يلي :

$$\mathcal{R}_B\left(\frac{\pi}{2}\right) : \begin{array}{ccc}(\mathcal{P}) & \mapsto & (\mathcal{P})\\ M(z) & \mapsto & M'(z')\end{array}$$

ننطلق من المعطى : $\mathcal{R}(A) = D$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$\left(aff(D)-aff(B)\right) = e^{\frac{i\pi}{2}}\left(aff(A)-aff(B)\right)$$

يعني : $(d-b) = e^{\frac{i\pi}{2}}(a-b)$

يعني : $d-4-8i = i(7+2i-4-8i)$

يعني : $d = 7i-2-4i+8+4+8i$

أي : $d = 10+11i$

2 ب

$$\begin{aligned}\frac{d-c}{b-c} &= \frac{(10+11i)-(-2+5i)}{(4+8i)-(-2+5i)}\\ &= \frac{12+6i}{6+3i} = \frac{2(6+3i)}{(6+3i)} = 2\end{aligned}$$

إذن : $\frac{d-c}{b-c} = 2$ و منه : $(d-c) = 2(b-c)$

و باستعمال المتجهات نكتب : $\overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{CB}$

إذن النقط C و B و D نقط مستقيمة .

يمكن أن نجيب بطريقة أخرى مبينة كما يلي :

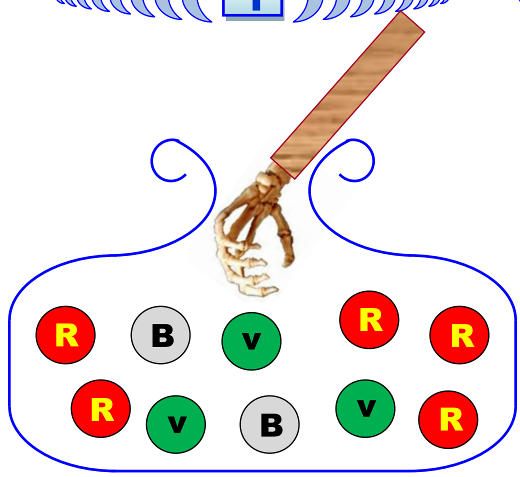
لدينا : $\frac{d-c}{b-c} = 2$ إذن : $\arg\left(\frac{d-c}{b-c}\right) \equiv 0\ [2\pi]$

يعني : $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv 0[2\pi]$

إذن النقط C و B و D نقط مستقيمة .

التمرين الثالث

1



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات فإنه توجد C_{10}^4 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$

بحيث Ω هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية .

لدينا :

$$\begin{aligned}p(A) = p\left(\begin{array}{c}\text{كرتان}\\ \text{حمراوين}\\ \text{و كرتان}\\ \text{خضراوين}\end{array}\right) &= \frac{card\left(\begin{array}{c}\text{كرتان}\\ \text{حمراوين}\\ \text{و كرتان}\\ \text{خضراوين}\end{array}\right)}{card(\Omega)}\\ &= \frac{C_5^2\times C_3^2}{210} = \frac{10\times3}{210} = \frac{1}{7}\end{aligned}$$

و لدينا كذلك : $p(B) = p\left(\begin{array}{c}\text{لا توجد أية}\\ \text{كرة بيضاء}\\ \text{مما سحبناه}\end{array}\right)$

و نلاحظ أن:

$$\begin{aligned}\overline{\left(\begin{array}{c}\text{لا توجد أية}\\ \text{كرة بيضاء}\\ \text{مما سحبناه}\end{array}\right)} &= \left(\begin{array}{c}\text{توجد على الأقل}\\ \text{كرة بيضاء من}\\ \text{بين الكرات}\\ \text{الأربع المسحوبة}\end{array}\right)\\ &= \left(\begin{array}{c}\text{كرتان بيضاوين}\\ \text{و كرتان تخالفان}\\ \text{اللون الأبيض}\end{array}\right) \text{ أو } \left(\begin{array}{c}\text{كرة بيضاء}\\ \text{واحدة و ثلاث}\\ \text{كرات غير ذلك}\end{array}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p\left(\begin{array}{c}\text{توجد على الأقل}\\ \text{كرة بيضاء من}\\ \text{بين الكرات}\\ \text{الأربع المسحوبة}\end{array}\right) &= p\left(\begin{array}{c}\text{كرة بيضاء}\\ \text{واحدة و ثلاث}\\ \text{كرات غير ذلك}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c}\text{كرتان بيضاوين}\\ \text{و كرتان تخالفان}\\ \text{اللون الأبيض}\end{array}\right)\\ &= \frac{C_2^1\times C_8^3}{210} + \frac{C_2^2\times C_8^2}{210} = \frac{2\times56}{210} + \frac{28}{210} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

و بالتالي : $p(B) = 1-p(\overline{B}) = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

2 أ

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة (يعني سحب أربع كرات في آن واحد) بعدد الكرات المسحوبة .

يضم الصندوق كرتين بيضاوين و 8 كرات تخالف اللون الأبيض .

إذن عندما نسحب في آن واحد أربع كرات فإنه يُحتمل الحصول على كرات كلها تخالف الأبيض ، أو الحصول على كرة بيضاء واحدة و الباقي يخالف الأبيض ، أو الحصول على كرتين بيضاوين و كرتين غير ذلك .

إذن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي : 0 و 1 و 2

أو بتعبير أجمل : $X(\Omega) = \{0;1;2\}$

2 ب

لدينا الحدث $[X=1]$ هو الحصول بالضبط على كرة بيضاء واحدة و ثلاث كرات مخالفة للون الأبيض .

إذن : $p[X=1]=\dfrac{C_2^1\times C_8^3}{210}=\dfrac{2\times 56}{210}=\dfrac{8}{15}$

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X احتمال كل قيمة من قيم هذا المتغير العشوائي .

لدينا حسب السؤال 1) : $p(B)=\frac{1}{3}$ إذن : $p[X=0]=\frac{1}{3}$

يكفي الآن أن نحسب $p[X=2]$

الحدث $[X=2]$ هو الحصول بالضبط على كرتين بيضاوين و كرتين تخالفين الأبيض

إذن : $p[X=2]=\dfrac{C_2^2\times C_8^2}{210}=\dfrac{28}{210}=\dfrac{2}{15}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$\begin{array}{rcl} P_X : \{0;1;2\} & \longmapsto & [0;1] \\ 0 & \longmapsto & P_X(0)=\frac{1}{3} \\ 1 & \longmapsto & P_X(1)=\frac{8}{15} \\ 2 & \longmapsto & P_X(2)=\frac{2}{15} \end{array}$$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نتحقق من أن :

$$P_X(0)+P_X(1)+P_X(2)=1$$

التمرين الرابع

1

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. لدينا :

$$5-u_{n+1}=5-\frac{25}{10-u_n}=\frac{50-5u_n-25}{10-u_n}=\frac{25-5u_n}{10-u_n}=\frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$$

لنبين بالترجع صحة العبارة (P_n) المعرفة بما يلي :

$$(P_n) :\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ 5-u_n>0$$

لدينا : $5-0>0$ يعني : $5-u_n>0$

إذن العبارة (P_1) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :\ 5-u_n>0$

إذن الكمية $(5-u_n)$ كمية موجبة قطعا .

و منه فإن الكميتان $5(5-u_n)$ و $5+(5-u_n)$ موجبتان قطعا .

إذن $\dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ كمية موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين قطعا

أي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}>0$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ 5-u_{n+1}>0$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

نحصل إذن على ما يلي : $\begin{cases} (P_1)\ est\ vraie \\ (P_n)\ implique\ (P_{n+1})\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N}^*) \end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ 5-u_n>0$

2 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$. لدينا : $v_n=\dfrac{5}{5-u_n}$

إذن :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{5}{5-u_{n+1}}=5\times\left(\frac{1}{5-u_{n+1}}\right) \\ &= 5\times\left(\frac{5+(5-u_n)}{5(5-u_n)}\right)=\frac{5+(5-u_n)}{(5-u_n)}=\frac{10-u_n}{5-u_n} \end{aligned}$$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ v_{n+1}=\dfrac{10-u_n}{5-u_n}$

و منه :

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \frac{10-u_n}{5-u_n}-\frac{5}{5-u_n} \\ &= \frac{10-u_n-5}{5-u_n}=\frac{5-u_n}{5-u_n}=1 \end{aligned}$$

2 ب

بما أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ v_{n+1}-v_n=1$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ v_{n+1}=v_n+1$

فإن : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية حسابية أساسها 1 .

إذن حدها العام v_n يكتب على الشكل :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ v_n=v_1+(n-1)1$$

لدينا : $v_1=\dfrac{5}{5-u_1}=\dfrac{5}{5-0}=1$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ v_n=1+(n-1)1$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ v_n=n$

و بما أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ v_n=\dfrac{5}{5-u_n}$

فإن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n=\dfrac{5}{5-u_n}$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ 5n-nu_n=5$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ nu_n=5n-5$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n=5-\dfrac{5}{n}$

2 ج

$$\lim_{n\infty}(u_n)=\lim_{n\infty}\left(5-\frac{5}{n}\right)=5-\frac{5}{\infty}=5-0=5$$

التمرين الخامس

1

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}f(x) &= \lim_{x\to+\infty}(x-2)^2e^x=(+\infty-2)^2e^{+\infty} \\ &= (+\infty)e^{+\infty}=(+\infty)\times(+\infty)=+\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)^2e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(x-2)^2\left(\frac{e^x}{x}\right) \\ &= (+\infty)^2\times(+\infty)=+\infty \end{aligned}$$

نحصل إذن على النهايتين التاليتين : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty \end{cases}$

و من هاتين النهايتين نستنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

2 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$f(x) = (x-2)^2e^x = (x^2-4x+4)e^x = x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$$

2 ب

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2e^x}_{\substack{x\to-\infty \\ 0^+}} - 4\underbrace{xe^x}_{\substack{x\to-\infty \\ 0^-}} + 4\underbrace{e^x}_{\substack{x\to-\infty \\ 0^+}} = 0$$

محور الأفاصيل مقارب أفقي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$

ملاحظة : $\lim_{x\to-\infty} x^ne^x = \begin{cases} 0^+ & si\ \ n\ est\ pair \\ 0^- & si\ \ n\ est\ impair \end{cases}$

3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $f(x) = (x-2)^2e^x$

إذن : $f'(x) = 2(x-2)e^x + (x-2)^2e^x = (x-2)e^x(2+(x-2)) = (x-2)xe^x$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = x(x-2)e^x$

3 ب

لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = x(x-2)e^x$

نعلم أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^x > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارتي x و $(x-2)$

و يُبَيِّنُ الجدول التالي إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

إذن من خلال هذا الجدول نستنتج أن f تزايدية على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ و تناقصية على المجال $[0;2]$.

4 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $f'(x) = x(x-2)e^x$

إذن : $f''(x) = (x-2)e^x + xe^x + x(x-2)e^x$

ملاحظة : $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

و بالتالي : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f''(x) = (x^2-2)e^x$

و نعلم أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^x > 0$

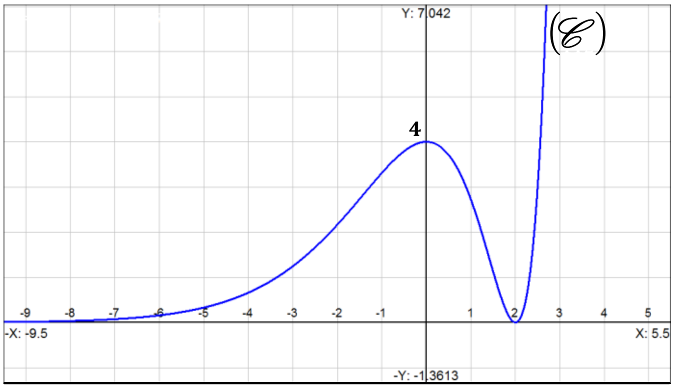
إذن إشارة $f''(x)$ تتعلق فقط بإشارة (x^2-2) و نلاحظ أن يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما هما حلا المعادلة $x^2-2=0$

يعني : $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$

أي : $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$.

إذن المنحنى يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما هما $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$.

4 ب



5 أ

نعتبر الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $H(x) = (x-1)e^x$

نلاحظ أن H دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن تشكيلة منسجمة من الدوال المتصلة على $\mathbb{R}$.

و لدينا : $H'(x) = ((x-2)e^x)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x = h(x)$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}\,dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 u'v\,dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = (e-0)-(e-1) = 1$$

5 ب

نحسب التكامل التالي باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء .

$$\int_0^1 \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}\,dx = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\,dx = [x^2e^x]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x\,dx = (e-0) - 2\times 1 = e-2$$

إذن : $\boxed{\int_0^1 x^2e^x\,dx = e-2}$

5 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الجزء من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ ومحور الأفاصيل و المستقيمين $x = 0$ و $x = 1$.

نحسب $\mathcal{A}$ باستعمال التكامل التالي : $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\, dx$

نعلم أن الدالة f تناقصية على $[0;2]$.

إذن فهي تناقصية على المجال $[0;1]$.

إذا كان : $0 \leq x \leq 1$ فإن : $f(0) \geq f(x) \geq f(1)$

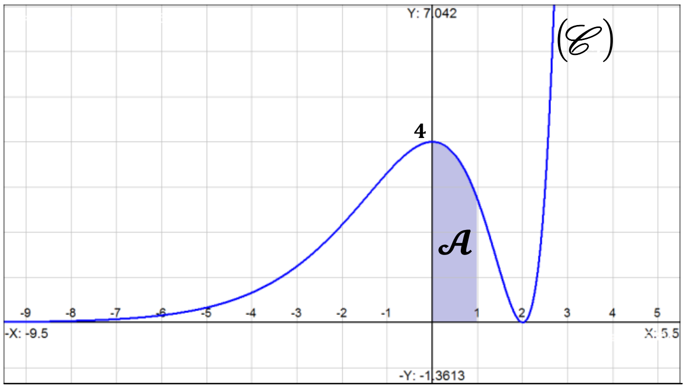
و منه : $4 \geq f(x) \geq e \geq 0$

إذن : $f(x)$ كمية موجبة قطعا على المجال $[0;1]$.

و منه : $\forall x \epsilon [0;1] \; ; \; |f(x)| = f(x)$

و بالرجوع إلى المساحة $\mathcal{A}$ نكتب :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$$
$$= \int_0^1 (x^2e^x - 4xe^x + 4e^x)\, dx$$
$$= \int_0^1 x^2e^x\, dx - 4\int_0^1 xe^x\, dx + 4\int_0^1 e^x\, dx$$
$$= (e-2) - 4 \times 1 + 4[e^x]_0^1$$
$$= (e-2) - 4 + 4(e-1) = 5e - 10$$
$$= 5(e-2) \approx 3{,}59\ cm^2$$



6

المعادلة : $x^2 = e^{-x} + 4x - 4$

تصبح : $x^2 - 4x + 4 = e^{-x}$

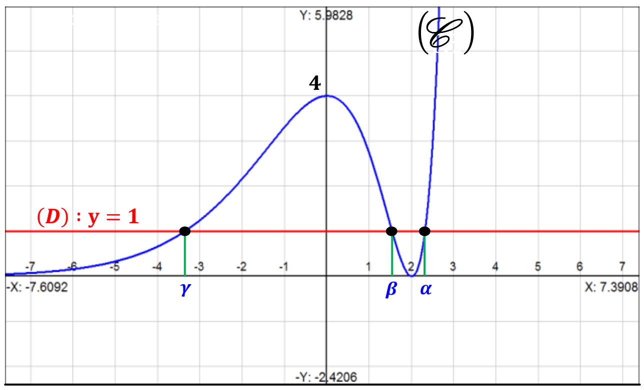
نضرب طرفي هذه المعادلة في الكمية الموجبة قطعا e^{-x} نجد :

$e^x(x^2 - e^{-x} - 4x + 4) = 0$

يعني : $x^2e^x - 4xe^x + 4e^x = 1$ يعني : $f(x) = 1$

إذن حلول هذه المعادلة الأخيرة هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) ذو المعادلة $(D) : y = 1$.

و هو ما يُبَيّنه الشكل التالي :



إذن : المعادلة تقبل ثلاثة حلول و هي α و β و γ .