المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵓⵔⴰⵏ
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2014

الموضوع

RS 22

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	المعامل	7

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات و مكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان)؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

مكونات الموضوع

يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	المتتاليات العددية	3 نقط
التمرين الثالث	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الرابع	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الخامس	دراسة دالة وحساب التكامل	8 نقط

الموضوع

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر،في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقطة $A(0,0,1)$ و المستوى (P) الذي معادلته $2x+y-2z-7=0$ و الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(0,3,-2)$ و شعاعها هو 3

0.5 | 1) أ- بين أن : $(t\in I\!R)$ $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من النقطة A والعمودي على (P)

0.5 | ب- تحقق من أن $H(2,1,-1)$ هي نقطة تقاطع المستوى (P) والمستقيم (Δ)

0.75 | 2) أ- بين أن $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=3(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$ حيث $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

0.5 | ب- بين أن مسافة النقطة Ω عن المستقيم (Δ) تساوي 3

0.75 | ج- استنتج أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) و تحقق من أن H هي نقطة تماس المستقيم (Δ) و الفلكة (S)

التمرين الثاني (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in I\!N^*}$ المعرفة بما يلي : $u_1=5$ و $u_{n+1}=\dfrac{5u_n-4}{1+u_n}$ لكل n من $I\!N^*$

0.75 | 1) بين بالترجع أن $u_n>2$ لكل n من $I\!N^*$

2) نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in I\!N^*}$ المعرفة بما يلي : $v_n=\dfrac{3}{u_n-2}$ لكل n من $I\!N^*$

1 | أ- بين أن $v_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{u_n-2}$ لكل n من $I\!N^*$ ثم بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in I\!N^*}$ حسابية أساسها 1

0.75 | ب- اكتب v_n بدلالة n و استنتج أن $u_n=2+\dfrac{3}{n}$ لكل n من $I\!N^*$

0.5 | ج- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الثالث (3 ن)

لتحديد سؤالي اختبار شفوي خاص بمباراة توظيف، يسحب مترشح، عشوائيا ، بالتتابع و بدون إحلال بطاقتين من صندوق يحتوي على 10 بطاقات : ثمان بطاقات تتعلق بمادة الرياضيات و بطاقتان تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية (نعتبر أنه لا يمكن التمييز بين البطاقات باللمس).

1.5 | 1) نعتبر الحدث A : " سحب بطاقتين تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية "
و الحدث B : " سحب بطاقتين تتعلقان بمادتين مختلفتين "

بين أن $p(A)=\dfrac{1}{45}$ و $p(B)=\dfrac{16}{45}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد البطاقات المسحوبة المتعلقة بمادة اللغة الفرنسية

0.25 | أ- تحقق من أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2

1.25 | ب- بين أن $p(X=0)=\dfrac{28}{45}$ ثم أعط قانون احتمال X

التمرين الرابع (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+5=0$ 0.75

2) نعتبر ،في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$، النقط A و B و C و D
و Ω التي ألحاقها على التوالي هي : $a=2+i$ و $b=2-i$ و $c=i$ و $d=-i$ و $\omega=1$

أ- بين أن $\dfrac{a-\omega}{b-\omega}=i$ 0.25

ب- استنتج أن المثلث ΩAB قائم الزاوية و متساوي الساقين في Ω 0.5

3) ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

أ- بين أن : $z'=iz+1-i$ 0.5

ب- تحقق من أن $R(A)=C$ و $R(D)=B$ 0.5

ج- بين أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة محددا مركزها 0.5

التمرين الخامس (8 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I\!R$ بما يلي : $f(x)=\left(xe^x-1\right)e^x$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة : $2\ cm$)

1) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و أول النتيجة هندسيا 0.75

2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ 0.75

ب- استنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه 0.5

3) أ- بين أن $f'(x)=e^x\left(e^x-1+2xe^x\right)$ لكل x من $I\!R$ ثم تحقق من أن $f'(0)=0$ 1

ب- بين أن $e^x-1\geq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$ و أن $e^x-1\leq 0$ لكل x من $]-\infty,0]$ 0.5

ج- بين أن الدالة f تزايدية على $[0,+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty,0]$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $I\!R$ 1.25

4) أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[0,+\infty[$ و أن $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ (نقبل أن $\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}<1$) 0.75

ب- أنشئ (C) في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة غير مطلوب تحديدها) 0.75

5) باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx=\frac{1}{4}$ 0.75

6) احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين 1
اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\dfrac{1}{2}$

حل التمرين 1

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

لدينا: $A(0; 0; 1)$ و $(P): 2x + y - 2z - 7 = 0$

و $(S): S(\Omega; 3)$ حيث $\Omega(0; 3; -2)$

1) أ- أبين أن: $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in IR)$ **تمثيل بارامتري**

للمستقيم (Δ) المار من A والعمودي على (P).

لدينا: $2x + y - 2z - 7 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P)،

إذن فالمتجهة التي مثلوث إحداثياتها $(2; 1; -2)$ هي متجهة منظمية على (P) وبالتالي فهي متجهة موجهة للمستقيم (Δ) العمودي على (P) والمار من النقطة $A(0; 0; 1)$.

ومنه فالتمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) هو:

$$(\Delta): \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 + t \\ z = +1 - 2t \end{cases} \quad (t \in IR)$$

يعني أن:

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in IR)$$

ب- أتحقق من أن $H(2; 1; -1)$ هي نقطة تقاطع المستوى (P) والمستقيم (Δ).

بما أن (Δ) عمودي على (P) فإن (Δ) يخترق المستوى (P) في نقطة H أتأكد أن مثلوث إحداثياتها هو $(2; 1; -1)$:

ولدينا: $2 \times (2) + (1) - 2 \times (-1) - 7 = 7 - 7 = 0$

إذن $H \in (P)$

ومن أجل $t = 1$ في التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) أجد:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$ وهي إحداثيات النقطة H.

إذن $H(2; 1; -1)$ هي نقطة تقاطع المستوى (P) والمستقيم (Δ).

2) أ- أبين أن: $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$

حيث $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

لدينا: $A(0; 0; 1)$ و $\Omega(0; 3; -2)$ إذن: $\overrightarrow{\Omega A}(0; -3; 3)$

وبما أن: $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ فإن:

$$\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = (0\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}) \wedge (2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$$
$$= (-3\vec{j} + 3\vec{k}) \wedge (2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$$
$$= 3(-\vec{j} + \vec{k}) \wedge (2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$$
$$= 3\left[-2\vec{j} \wedge \vec{i} - \vec{j} \wedge \vec{j} + 2\vec{j} \wedge \vec{k} + 2\vec{k} \wedge \vec{i} + \vec{k} \wedge \vec{j} - 2\vec{k} \wedge \vec{k}\right]$$
$$= 3\left[2\vec{k} - \vec{0} + 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{i} - \vec{0}\right]$$

لا أنسى أن:
$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$
$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$
$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

إذن: $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$

ب- أبين أن مسافة النقطة Ω عن (Δ) تساوي 3.

لدينا: $\Omega(0; 3; -2)$ و $A(0; 0; 1)$ تنتمي إلى (Δ)

و $\vec{u}(2; 1; -2)$ متجهة موجهة لـ (Δ)

إذن:

$$d(\Omega; (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})\|}{\|2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\|}$$
$$= \frac{|3|\,\|\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\|}{\|2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\|} = 3\frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}}$$
$$= 3$$

ج- أستنتج أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) وأتحقق أن H هي نقطة تماس المستقيم (Δ) والفلكة (S).

- لدينا حسب نتيجة السؤال السابق: مسافة Ω مركز الفلكة (S) عن المستقيم (Δ) تساوي 3 الذي هو شعاع الفلكة، إذن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S).
- نعلم أن النقطة $H(2; 1; -1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ولدينا: $\overrightarrow{\Omega H}(2; -2; 1)$ و $\Omega H = \|\overrightarrow{\Omega H}\|$

$$= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

بما أن H تبعد عن Ω مركز الفلكة بالمسافة 3 التي تساوي شعاع الفلكة فإن $H \in (S)$ وبالتالي فالنقطة H هي نقطة تماس الفلكة (S) والمستقيم (Δ).

حل التمرين 2

$(u_n)_{n\in IN^*}$ هي المتتالية بحيث:

$$u_1 = 5 \quad \text{و} \quad (\forall n \in IN^*) : u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n}$$

1) أبين بالترجع أن: $u_n > 2$ لكل n من IN^*

• من أجل $n = 1$ لدينا: $u_1 = 5 > 2$ إذن الخاصية صحيحة من أجل الحد الأول.

• نفترض أن: $u_n > 2$ من أجل $n \geq 1$ ولنبين أنها صحيحة من أجل $n + 1$:

لدينا:

$$u_{n+1} - 2 = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} - 2$$

$$= \frac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1 + u_n} = \frac{3u_n - 6}{1 + u_n} = \frac{3(u_n - 2)}{1 + u_n}$$

وبما أن $u_n > 2$ حسب افتراض الترجع فإن $u_n > 0$ و $u_n - 2 > 0$

وبالتالي $1 + u_n > 0$ و $u_{n+1} - 2 = \frac{3(u_n - 2)}{1 + u_n} > 0$

يعني أن: $u_{n+1} > 2$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

وبالتالي: $(\forall n \in IN^*) : u_n > 2$

2) لدينا $(v_n)_{n\in IN^*}$ المتتالية المعرفة كما يلي: $v_n = \dfrac{3}{u_n - 2}$

أبين أن $v_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{u_n - 2}$ لكل n من IN^* ثم أبين أن المتتالية $(v_n)_{n\in IN^*}$ حسابية أساسها 1.

• لكل n من IN^* لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{3}{u_{n+1} - 2}$$

$$= \frac{3}{\frac{5u_n - 4}{1 + u_n} - 2} = \frac{3}{\frac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1 + u_n}}$$

إذن لكل n من IN^* لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{3}{\frac{3u_n - 6}{1 + u_n}}$$

يعني أن: $v_{n+1} = \dfrac{\cancel{3}(1 + u_n)}{\cancel{3}(u_n - 2)}$

يعني أن: $v_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{u_n - 2}$ لكل n من IN^*

• لدينا لكل n من IN^*:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1 + u_n}{u_n - 2} - \frac{3}{u_n - 2}$$

$$= \frac{1 + u_n - 3}{u_n - 2}$$

$$= \frac{u_n - 2}{u_n - 2} = 1 \qquad (u_n \neq 2)$$

إذن $(v_n)_{n\in IN^*}$ متتالية حسابية أساسها 1.

ب- أكتب v_n بدلالة n وأستنتج أن: $u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$ لكل n من IN^*.

• لدينا: $v_1 = \dfrac{3}{u_1 - 2} = \dfrac{3}{5 - 2} = 1$ إذن $(v_n)_{n\in IN^*}$ متتالية حسابية حدها الأول $v_1 = 1$ وأساسها $r = 1$ إذن حسب صيغة الحد العام لمتتالية حسابية: لدينا

لكل n من IN^*: $v_n = v_1 + (n - 1)r$

يعني $v_n = 1 + (n - 1) \times 1$

إذن: لكل n من IN^*: $v_n = n$

• نعلم أن لكل n من IN^*: $v_n = \dfrac{3}{u_n - 2}$ يعني $u_n - 2 = \dfrac{3}{v_n}$

إذن: $\left(\forall n \in IN^*\right) : u_n = \dfrac{3}{v_n} + 2$

يعني أن: $\left(\forall n \in IN^*\right) : u_n = \dfrac{3}{n} + 2$

ج- أحدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$ وبما أن $\left(\forall n \in IN^*\right) : u_n = \dfrac{3}{n} + 2$

فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

حل التمرين 3

التجربة العشوائية تقتضي السحب بالتتابع وبدون إحلال لبطاقتين من صندوق يحتوي على 10 بطاقات.

1) A هو الحدث: «سحب بطاقتين تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية»

B هو الحدث: «سحب بطاقتين تتعلقان بمادتين مختلفتين»

حيث عدد بطاقات الرياضيات هو 8 وعدد بطاقات الفرنسية هو 2.

• أبين أن: $p(A)=\frac{1}{45}$ و $p(B)=\frac{16}{45}$

- بما أننا في حالة فرضية تساوي الاحتمالات فإن: $p(A)=\frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$ حيث Ω هو كون الإمكانيات في هذه التجربة العشوائية و $\text{card } \Omega = A_{10}^2 = 90$

وبما أن A هو الحدث: سحب بطاقتين للغة الفرنسية من أصل بطاقتين فإن: $\text{card } A = A_2^2 = 2$

وبالتالي لدينا: $p(A)=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$

كذلك لدينا: $p(B)=\frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega}=\frac{2\times A_2^1\times A_8^1}{90}$

$$=\frac{32}{90}=\frac{16}{45}$$

(لأن عدد إمكانيات B هو $A_2^1\times A_8^1$ مع أخذ بالاعتبار ترتيب البطاقتين أي الضرب في الذي هو عدد المواقع في الترتيب).

2) X هو المتغير العشوائي الذي يُعطي عدد بطاقات اللغة الفرنسية.

أ- أتحقق أن القيم التي يأخذها X هي: 0 و 1 و 2.

بما أننا نسحب بطاقتين من الصندوق وعدد بطاقات الفرنسية بداخله هو 2 فإن إمكانيات سحب بطاقة للغة الفرنسية هي:

- البطاقتين المسحوبتين هما للرياضيات: في هذه الحالة X يأخذ القيمة 0.
- البطاقتين مكونتين من واحدة لمادة الرياضيات والأخرى لمادة الفرنسية وفي هذه الحالة X يأخذ القيمة 1.
- البطاقتين المسحوبتين هما للغة الفرنسية وهنا X يأخذ القيمة 2.

وبالتالي فالقيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي: 0 و 1 و 2

أي: $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

ب- أبين أن: $p(X=0)=\frac{28}{45}$ ثم أعطي قانون احتمال X.

• الحدث $(X=0)$ يعني أن البطاقتين المسحوبتين هي لمادة الرياضيات،

إذن: $\text{card }(X=0)=A_8^2=56$ وبالتالي:

$$p(X=0)=\frac{\text{card }(X=0)}{\text{card } \Omega}=\frac{56}{90}=\frac{28}{45}$$

• قانون احتمال X:

لدينا: $(X=1)$ هو الحدث B (سحب بطاقتين مختلفتي المادة)

و $(X=2)$ هو الحدث A (سحب بطاقتين للغة الفرنسية)

وبالتالي فقانون احتمال X هو:

$X(\Omega)$	0	1	2
$p(X=x_i)$	$p(X=0)=\frac{28}{45}$	$p(X=1)=\frac{16}{45}$	$p(X=2)=\frac{1}{45}$

حل التمرين 4

1) أحل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة: $z^2-4z+5=0$

مُميز هذه المعادلة هو: $\Delta=(-4)^2-4\times5\times1$

$$=16-20=-4$$

إذن: $\Delta=(2i)^2$

وحلي المعادلة هما: $z_1=\frac{4-2i}{2}$ و $z_2=\frac{4+2i}{2}$

أي: $z_1=2-i$ و $z_2=2+i$

إذن مجموعة الحلول هي: $S=\{2-i;2+i\}$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى المعلم المتعامد الممنظم المباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

لدينا: $A(a=2+i)$ و $B(b=2-i)$ و $C(c=i)$ و $D(d=-i)$ و $\Omega(\omega=1)$

أ- أبين أن: $\frac{a-\omega}{b-\omega}=i$

لدينا:

$$\frac{a-\omega}{b-\omega}=\frac{2+i-1}{2-i-1}$$

$$=\frac{1+i}{1-i}$$

$$=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{\cancel{1}+2i-\cancel{1}}{2}$$

إذن: $\frac{a-\omega}{b-\omega} = i$

ب- أستنتج أن المثلث ΩAB قائم الزاوية ومتساوي الساقين في Ω.

لدينا: $\Omega B : |b-\omega|$ و $\Omega A : |a-\omega|$

وبما أن: $\frac{a-\omega}{b-\omega} = i$ فإن: $\left|\frac{a-\omega}{b-\omega}\right| = \frac{|a-\omega|}{|b-\omega|} = |i| = 1$

إذن: $|a-\omega| = |b-\omega|$ أي أن: $\Omega A = \Omega B \quad (1)$

من جهة أخرى نعلم أن:

$$\left(\overline{\Omega B};\overline{\Omega A}\right) \equiv \arg\left(\frac{a-\omega}{b-\omega}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \arg(i)\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

أي أن الزاوية $\left[\widehat{A\Omega B}\right]$ قائمة (2).

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن: ΩAB مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في Ω.

3) لدينا: $M(z)$ و $M'(z')$ حيث $R(M) = M'$ و R هو الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- أبين أن: $z' = iz + 1 - i$

أعلم أنه حسب الصيغة العقدية للدوران R لدينا:

$$z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)$$

وبما أن: $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ فإن: $z' - 1 = iz - i$

وبالتالي: $z' = iz + 1 - i$

ب- أتحقق أن: $R(A) = C$ و $R(D) = B$:

• حسب السؤال أ- لدينا: $z' = iz + 1 - i$

هي الصيغة العقدية للدوران R إذن:

$$ia + 1 - i = i(2+i) + 1 - i$$
$$= 2i - \cancel{1} + \cancel{1} - i$$
$$= i = c$$

وهذا يعني أن: $R(A) = C$

• ولدينا كذلك:

$$id + 1 - i = i(-i) + 1 - i$$
$$= 1 + 1 - i$$
$$= 2 - i = b$$

وهذا يعني أن: $R(D) = B$

ج- أبين أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة، أحدد مركزها:

حسب النتيجة ب- لدينا: $R(A) = C$ إذن: $\Omega A = \Omega C$

و $R(D) = B$ إذن: $\Omega D = \Omega B$

وحسب النتيجة 2) ب- لدينا: $\Omega A = \Omega B$، نستنتج إذن أن:

$\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ وهذا يعني أن النقط A و C و D و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها Ω.

حل التمرين 5

لدينا f الدالة المعرفة على IR كمايلي: $f(x) = (xe^x - 1)e^x$

(C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 2cm)

1) أبين أن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ وأؤول النتيجة هندسياً.

• أعلم أن:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

إذن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1\times 0 = 0$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ يعني أن المنحنى (C) يقبل المستقيم ذي المعادلة: $y = 0$ كمقارب أفقي بجوار $-\infty$.

(يعني أن محور الأفاصيل هو مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $-\infty$)

2) أبين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

• لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (xe^x - 1)e^x = +\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} (xe^x - 1) = +\infty$

• كذلك لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(e^x-\frac{1}{x}\right)e^x}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{x}\right)e^x$$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

ب- أستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجمياً بجوار ∞+، أحدده.

لدينا حسب نتيجة 2) أ- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

إذن المنحنى (C) يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب بجوار ∞+.

3) أ- أبين أن: $f'(x)=e^x(e^x-1+2xe^x)$ لكل x من IR ثم أتحقق أن: $f'(0)=0$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR (جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على IR)

ولدينا:

$$(\forall x\in IR)\ ;\ f'(x)=(xe^x-1)'e^x+(xe^x-1)(e^x)'$$
$$=(xe^x)'e^x+(xe^x-1)e^x$$
$$=(e^x+xe^x)e^x+(xe^x-1)e^x$$
$$=e^x\left[e^x+xe^x+xe^x-1\right]$$

إذن: $(\forall x\in IR): f'(x)=e^x(e^x-1+2xe^x)$

• لدينا: $f'(0)=e^0(e^0-1+2\times0\times e^0)$

$$=1\times(1-1)=0$$

ب- أبين أن: $(\forall x\in[0,+\infty[)\ ;\ e^x-1\geq0$ و $(\forall x\in]-\infty,0])\ ;\ e^x-1\leq0$

أعلم أن الدالة $x\mapsto e^x$ تزايدية على IR، إذن:

• لكل $x\geq0$ لدينا: $e^x\geq e^0$ يعني $e^x\geq1$ يعني $e^x-1\geq0$

وبالتالي: $e^x-1\geq0$ لكل $x\in[0;+\infty[$.

• لكل $x\leq0$ لدينا: $e^x\leq e^0$ يعني $e^x\leq1$ يعني $e^x-1\leq0$

وبالتالي: $e^x-1\leq0$ لكل $x\in]-\infty;0]$.

ج- أبين أن الدالة f تزايدية على $[0;+\infty[$ وتناقصية على $]-\infty;0]$ ثم أضع جدول تغيرات الدالة f على IR.

• لدينا: $(\forall x\in IR): f'(x)=e^x(e^x-1+2xe^x)$

وحسب السؤال السابق لدينا: لكل x من $[0,+\infty[$:

$e^x-1\geq0$ و $e^x>0$ و $2xe^x\geq0$ إذن: $f'(x)\geq0$

وهذا يعني أن f تزايدية على $[0,+\infty[$.

- ولكل x من $]-\infty;0]$ لدينا: $e^x>0$ و $xe^x\leq0$ و $e^x-1\leq0$

إذن: $(e^x-1+2xe^x)\leq0$ و $e^x>0$ أي أن: $f'(x)\leq0$

وهذا يعني أن f تناقصية على المجال $]-\infty;0]$.

• جدول التغيرات على IR:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	0	↘	−1	↗	$+\infty$

4) أ- أبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في $[0;+\infty[$ وأن $\frac{1}{2}<\alpha<1$

• أعلم أن الدالة: $x\mapsto e^x$ متصلة على $[0;+\infty[$ والدالة $x\mapsto x$ متصلة على $[0;+\infty[$ إذن دالة الجذاء: $x\mapsto xe^x$ متصلة على $[0;+\infty[$ وبالتالي الدالة: $x\mapsto xe^x-1$ متصلة على $[0;+\infty[$ إذن الدالة $f: x\mapsto(xe^x-1)e^x$ متصلة على $[0;+\infty[$.

وحسب نتيجة السؤال السابق لدينا، f تزايدية قطعاً على $[0;+\infty[$ و $f([0;+\infty[)=[-1;+\infty[$ (لأن $f'\geq0$ و f' تنعدم في نقطة واحدة هي 0 على $[0;+\infty[$).

وبما أن $0\in[-1;+\infty[$ فإن 0 يقبل سابقاً وحيداً α بالدالة f في المجال $[0;+\infty[$ أي أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في $[0;+\infty[$.

• أبين أن $\frac{1}{2}<\alpha<1$: لدينا: $f(1)=(e-1)e>0$

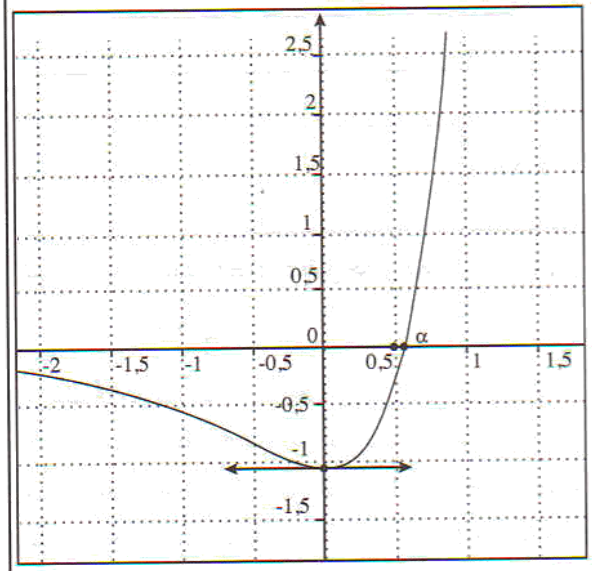
و $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}-1\right)e^{\frac{1}{2}}$ وبما أن: $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}<1$ فإن $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

بما أن f متصلة وتزايدية قطعاً على $]0;+\infty[$ فإنها كذلك على $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

ولدينا $f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(1)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية فإن: $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$.

ب- إنشاء (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(تقبل وجود نقطة انعطاف وحيدة)



لدينا: $f'(0)=0$ يعني وجود مماس موازي لمحور الأفاصيل في النقطة ذات الأفصول 0.

5) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أبين أن: $\int_0^{\frac{1}{2}} x\,e^{2x}\,dx=\frac{1}{4}$

أضع: ($u'(x)=e^{2x}$ و $v(x)=x$)

إذن: ($u(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$ و $v'(x)=1$)

ومنه:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x\,e^{2x}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}} u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$=\left[u(x)\,v(x)\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}} u(x)\,v'(x)\,dx$$

$$=\left[x\times\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}e-\frac{1}{4}(e-1)=\cancel{\frac{1}{4}e}-\cancel{\frac{1}{4}e}+\frac{1}{4}$$

إذن: $\int_0^{\frac{1}{2}} x\,e^{2x}\,dx=\frac{1}{4}$

6) أحسب بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$.

لتكن A مساحة الحيز المطلوب، لدينا:

$$A=\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|\,dx\times(\text{الوحدة})$$

وأعلم أن: $\left(\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right);\ f(x)\leq 0$

إذن: $|f(x)|=-f(x)$

وبالتالي: $A=-\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx\times 4\,cm^2$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}(xe^{x}-1)\,e^{x}\,dx\times 4cm^2$$

$$=\left(-\int_0^{\frac{1}{2}}xe^{2x}\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}e^{x}\,dx\right)\times 4cm^2$$

$$=\left(-\frac{1}{4}+\left[e^{x}\right]_0^{\frac{1}{2}}\right)\times 4cm^2$$

$$=\left(-\frac{1}{4}+\sqrt{e}-1\right)\times 4cm^2$$

$$=\left(4\sqrt{e}-5\right)cm^2$$

إذن: $A=\left(4\sqrt{e}-5\right)cm^2$