

## Exercices de logique

### Exercice (1)

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq 10y$	$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x + y > 2$	$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x^2 + y \leq xy$
$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) x + \frac{1}{x} \geq 2$	$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x + 2y \leq 1$	$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}) a^2 + 2b^2 > 4ab$

### Exercice (2)

Compléter les énoncés suivants pour avoir des propositions vraies

$$(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq 4 \Leftrightarrow \dots\dots\dots, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) x \leq 2x^2 \Leftrightarrow x \in \dots\dots\dots, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*) \frac{1}{x} > 3 \Leftrightarrow \dots\dots\dots x \dots\dots\dots$$

### Exercice (3)

- 1) montrer que :  $(\forall (a, b) \in [2, +\infty[^2) a^2 - 4a = b^2 - 4b \Rightarrow a = b$
- 2) soient  $b, a$  de  $\mathbb{R}^*$  tels que  $a - b \neq 0$ . montrer que  $\frac{a+b}{a-b} = 3 \Rightarrow a = 2b$
- 3)  $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*) \left( x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} \right) \Rightarrow (x = y \text{ ou } xy = 1)$
- 4) a) quelle est la négation de la proposition  $P$  " $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x^2 + y - 2xy = 0$ "  
 b) montrer que  $P$  est fausse

### Exercice (4)

En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :

- 1)  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) (x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \Rightarrow (xy + 1 \neq x + y)$
- 2)  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) (x \neq y) \Rightarrow ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1))$
- 3)  $(\forall x \in \mathbb{N}^*)(\forall y \in \mathbb{N}^*) : xy = 1 \Rightarrow (x = 1 \text{ et } y = 1)$
- 4)  $(\forall a \in \mathbb{R}^+) a^4 + 8a^3 + 18a^2 + 8a > 3 \Rightarrow a + 2 > \sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{2}}}$

### Exercice (5)

En utilisant le raisonnement par récurrence montrer que :

- 1)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 11/3^{2n} + 2^{6n-5}$       2)  $(\forall n \in \mathbb{N}) 17/3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$
- 3)  $\sum_{k=0}^{k=n} 3^k = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$       4)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$
- 5)  $\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$       6)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \leq \frac{n+1}{2}$
- 6)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 2^n (1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)) = (n+1)(n+2) \times \dots \times (n+n)$
- 7) soit  $x$  un réel de  $\mathbb{R}^+$ . a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) (1+x)^n \geq 1 + nx$   
 b) déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (1+n)^n \geq 2n^n$