

Les limites

Exercice 1

On considère la fonction $f(x) = \frac{x^2 + 1 - \cos x}{x + \sin x}$

a) calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

b) montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{3}{4}$

c) montrer que

$$\forall x > 1 : \frac{x^2}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{x^2 + 2}{x-1}$$

en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

d) montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Exercice 2

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x \cos x + 1}$

a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) |x - \cos x| \leq f(x)$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

c) déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x}$

d) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) f(x) \leq x + 1$

en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Exercice 3

Soient $a > 0$ et $b \neq 0$

On considère la fonction $f(x) = \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right)$

a) Montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad \frac{b}{a} - \frac{x}{a} < f(x) \leq \frac{b}{a}$$

b) encadre $f(x)$ pour $x < 0$

c) en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad \left| f(x) - \frac{b}{a} \right| \leq \frac{|x|}{a}$

puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Exercice 4

1) Déterminer suivant a la limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{ax}{(x^2-1)^2}$$

2) Étudier suivant a la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - ax$$

Exercice 5

Soit $m \in \mathbb{R}$ on considère la fonction

$$f_m(x) = \frac{x^3 + mx + 1}{x^2 + x}$$

a) déterminer D le domaine de f_m

b) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$

c) discuter suivant m la limite $\lim_{x \rightarrow -1} f_m(x)$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x} & ; x < 1 \\ f(x) = \frac{-2x + k}{\sqrt{x^2 + 2} + 1} & ; x \geq 1 \end{cases}$$

a) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

c) calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ puis déduire b

pour que f admette une limite en $a = 1$

Exercice 7

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ax+1)^2 - 1}{x}$

b) montrer par récurrence que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ax+1)^n - 1}{x} = na, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

c) en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(11x+1)^{157} + (3x-1)^{97}}{x}$

Les limites

Exercice 8

Soit la fonction $f(x) = \frac{\sin x + E(x)}{x}$

- a) montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$
 b) calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
 c) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) |f(x) - 1| \leq \frac{2}{x}$
 en déduire la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice 9

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\sin x}}{x^2 \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{15-2x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{\cos x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{4-x}}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - x - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} - 2}{\sqrt{x-1} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x - \sqrt{x+1}} - \sqrt{x-1}; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} xE\left(\frac{4}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(1-x^2)\sqrt{x^2+2} + 2}{x^2 - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(\sqrt{x})}{x+1}$$

Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} E(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

Exercice 10

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + (m+1)x - 3}{x^2 + x} & ; x < -1 \\ f(x) = \frac{-2x + b}{\sqrt{x^2 + 2} + 1} & ; x \geq -1 \end{cases}$$

- a) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 b) discuter suivant m la limite $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
 c) calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ puis déduire b et m
 pour que f admette une limite en $a = -1$

Exercice 11

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right) & ; x < 0 \\ f(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{x}} & ; x > 0 \end{cases}$$

- 1) montrer que $(\forall x < 0) 1 \leq xE\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x$

en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

- 2) f admet-elle une limite en $a = 0$?

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|} - E(x)}{x^2}$$

- 1) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) 0 \leq f(x) < \frac{1}{x^2}$

en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- 2) montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{-*}) 0 \leq f(x) < \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2}$$

en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Exercice 13

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2}$$

- 1) vérifier que

$$\frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} + \cos x \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

Et calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2}$

- 2) en déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 7$