

Limites et comportement asymptotique

Exercices corrigés

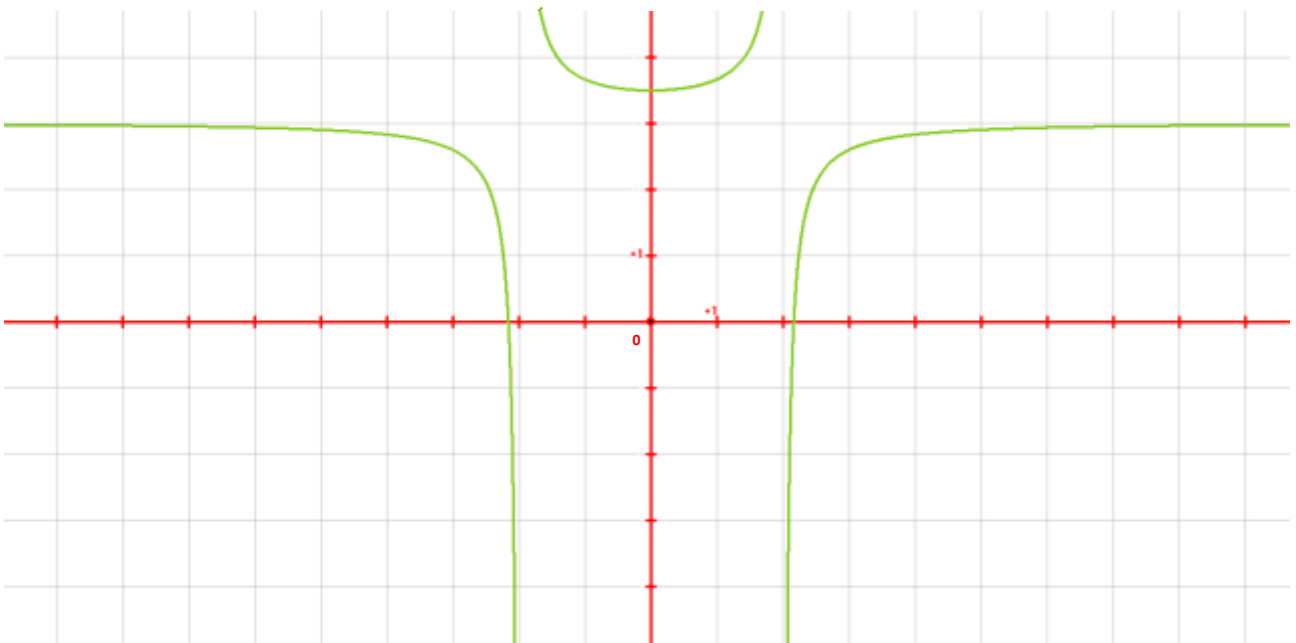
Sont abordés dans cette fiche :

- **Exercice 1** : détermination graphique d'une limite et d'une équation d'asymptote à une courbe (asymptote verticale et asymptote horizontale)
- **Exercice 2** : étude de limites, asymptotes verticales et horizontales
- **Exercice 3** : étude de limites de fonctions composées, formes indéterminées, expression conjuguée, asymptotes horizontales
- **Exercice 4** : limites aux bornes d'un ensemble de définition, asymptote oblique
- **Exercice 5** : asymptotes parallèles aux axes d'un repère, équation d'asymptote oblique

Exercice 1 (2 questions)

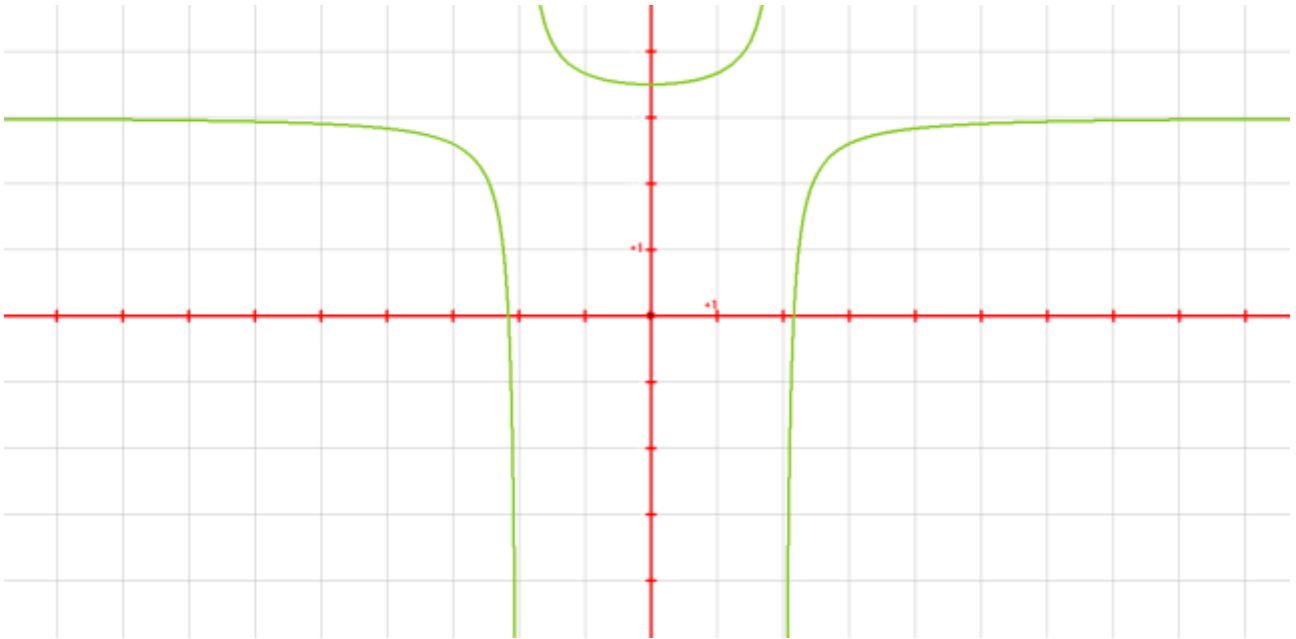
Niveau : facile

On a tracé ci-dessous en vert C_f , la courbe représentative d'une fonction f . Déterminer graphiquement D_f , l'ensemble de définition de f , puis une équation de chacune des asymptotes à C_f .



Correction de l'exercice 1

1) Ci-dessous est tracée en vert C_f , la courbe représentative d'une fonction f .



$$D_f =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$$

Rappel : Continuité d'une fonction

Soient I un intervalle, f une fonction définie (au moins) sur I et a un réel tel que $a \in I$.

- **Continuité en un point :** f est continue en a si et seulement si f admet une limite en a égale à $f(a)$:

C'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ et en particulier $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

- **Continuité sur un intervalle :** f est continue sur I si f est continue en tout point a de I .

Graphiquement, on lit : $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \text{ donc } f \text{ n'est pas continue en } -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

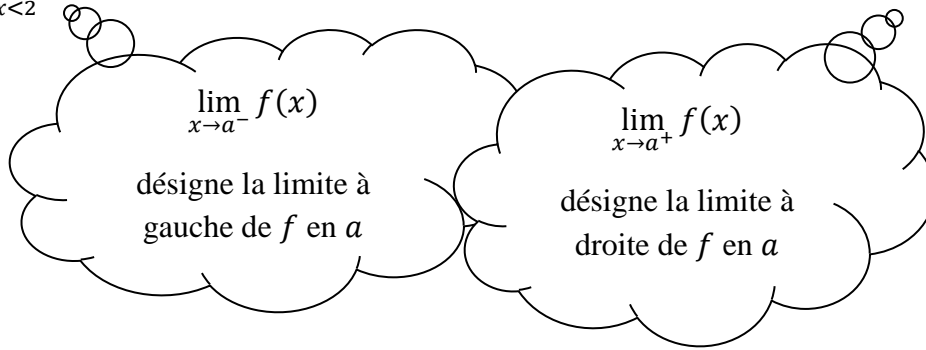
Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ donc f n'est pas continue en 2.

Remarque – Notation :

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < 2}} f(x)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > 2}} f(x)$$



2)

Rappel : Asymptotes à une courbe

• **Asymptote horizontale :**

Soit a un réel.

Si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$

Alors la courbe représentative de f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = a$ en $-\infty$.

Si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$

Alors la courbe représentative de f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = a$ en $+\infty$.

• **Asymptote verticale :**

Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

ou si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

ou si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

Alors la courbe représentative de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.

• **Asymptote oblique :**

Soit a un réel non nul et b un réel.

Si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

ou si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

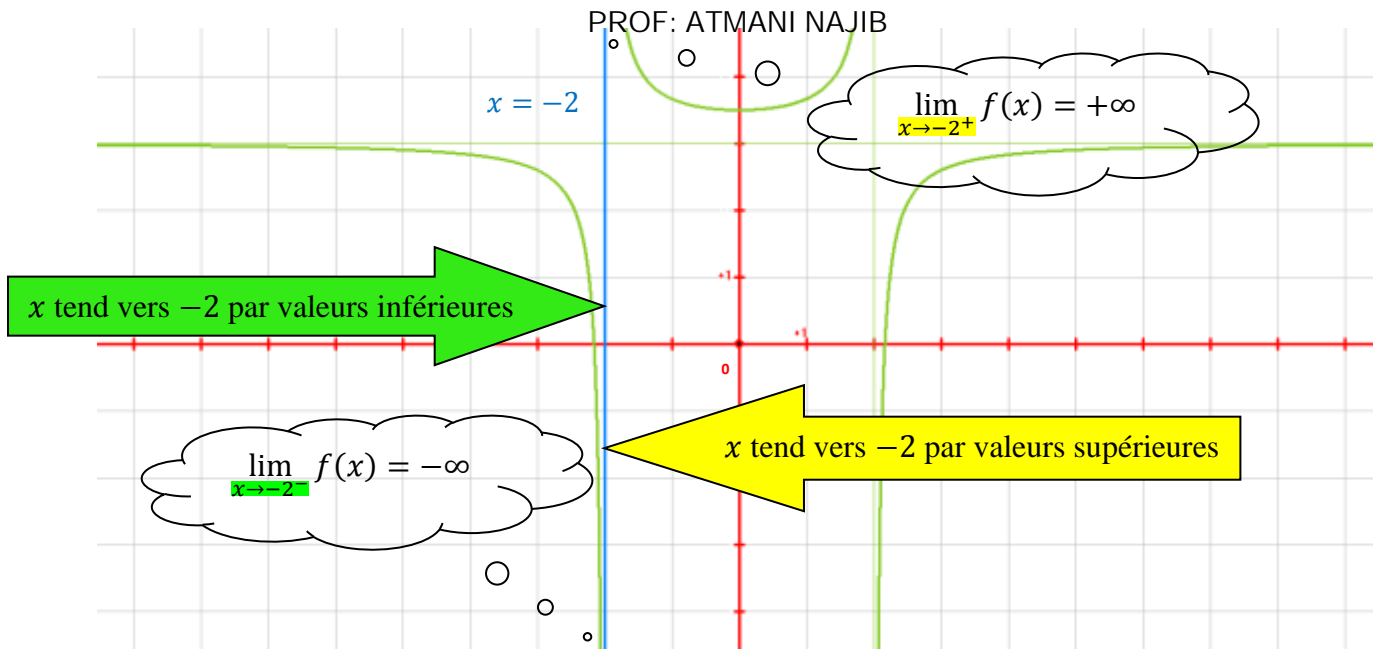
Alors la courbe représentative de f admet une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$.

Graphiquement, on lit :

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

Donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à C_f .

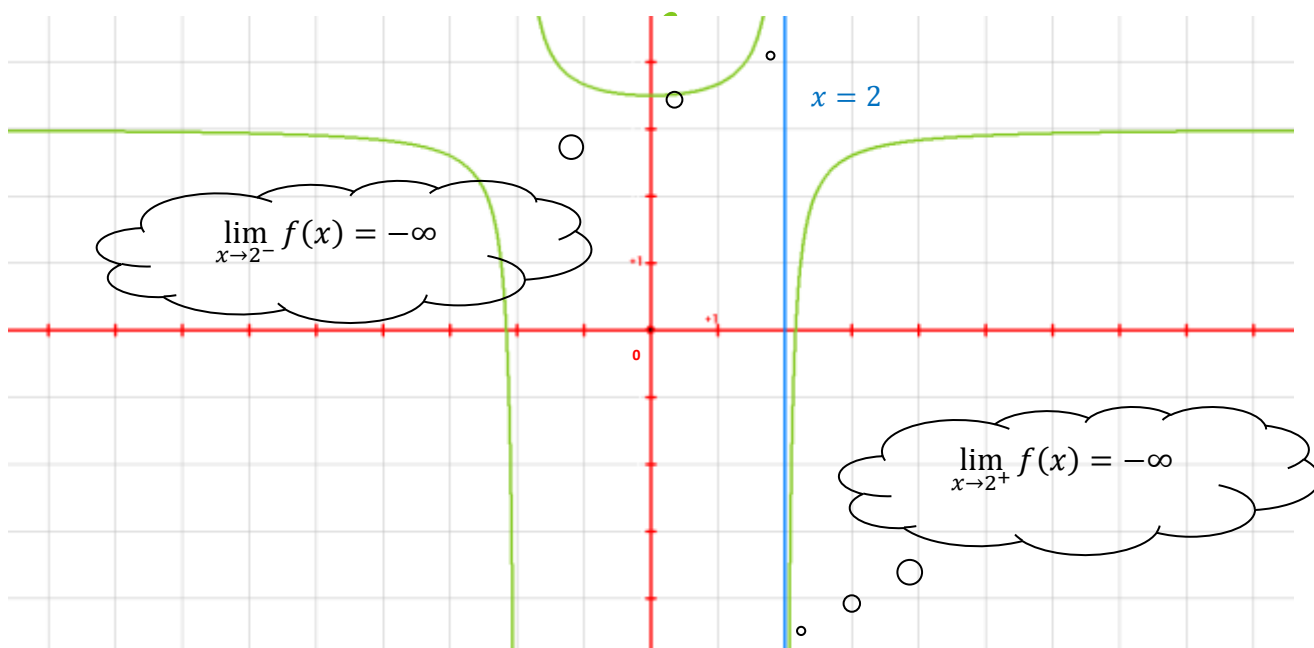


Par ailleurs,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

Donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à C_f

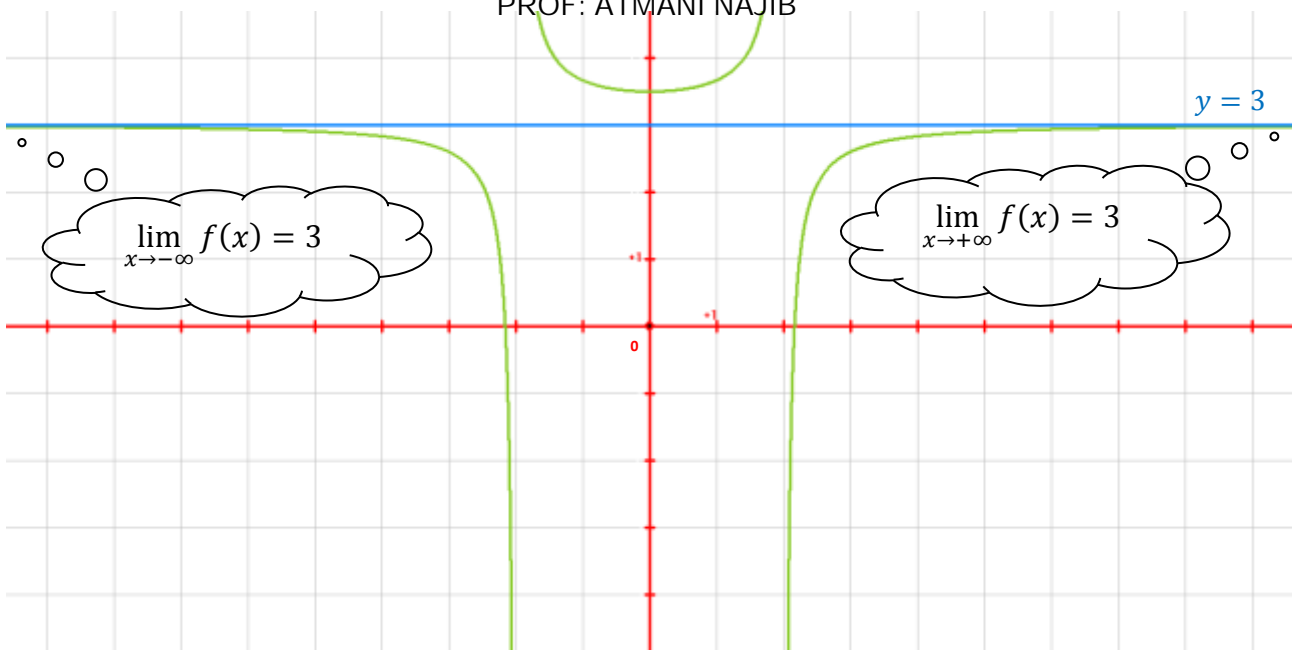


Enfin,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

Donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à C_f en $-\infty$ et en $+\infty$.



Exercice 2 (2 questions)

Niveau : facile

Déterminer les limites suivantes et en déduire la présence d'une éventuelle asymptote.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3}{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5x}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x-1} + 3x + 2 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x-7}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{-x^3 + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x + 7}{x^2 - 2}$$

Correction de l'exercice 2

Remarque préalable : Le verbe « déduire » signifie « partir de propositions prises pour prémisses ». Il s'agit donc d'utiliser le résultat de l'étude d'une limite pour conclure la présence ou non d'une asymptote.

1) Déterminons $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3}{x+2}$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} x + 2 = 0^-$$

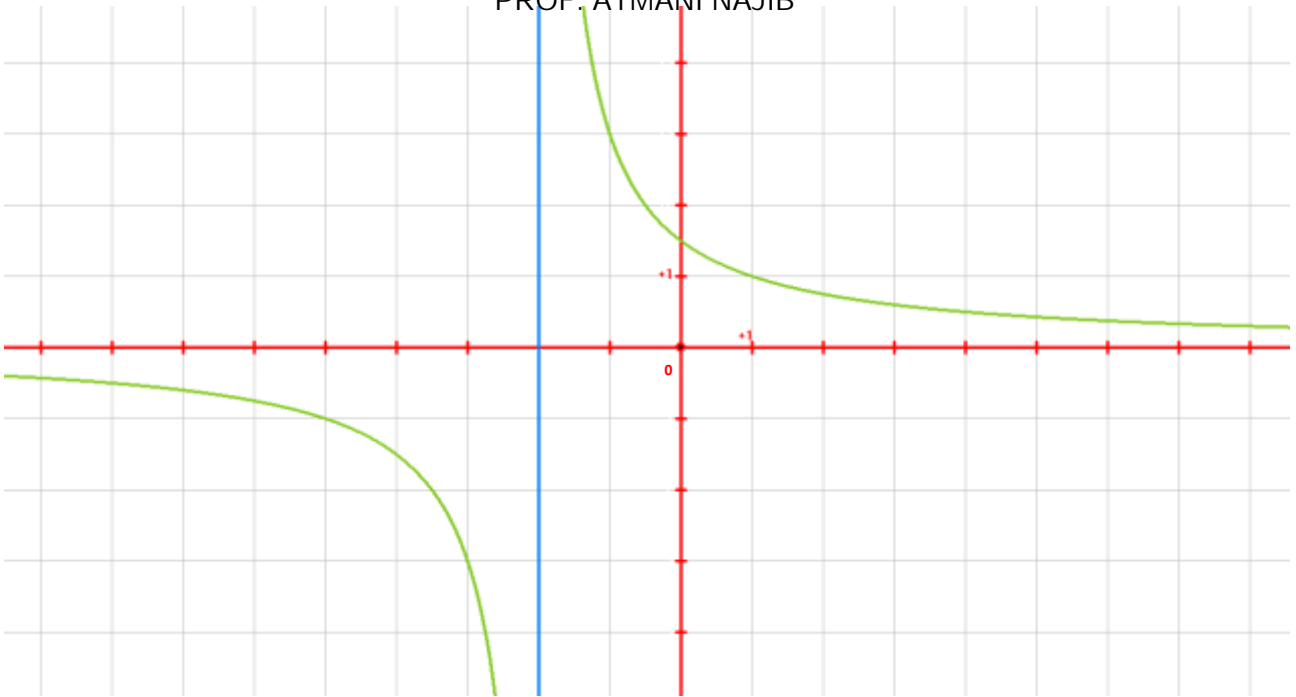
D'où, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{X} = -\infty$$

Si $X = x + 2$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} X = 0^-$$

On en déduit que la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{3}{x+2}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$ (représentée ci-dessous en bleu).



Remarque :

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x + 2 = 0^+$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{X} = +\infty$$

Cette étude de limite aurait également permis d'établir que la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{3}{x+2}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$ (représentée ci-dessus en bleu).

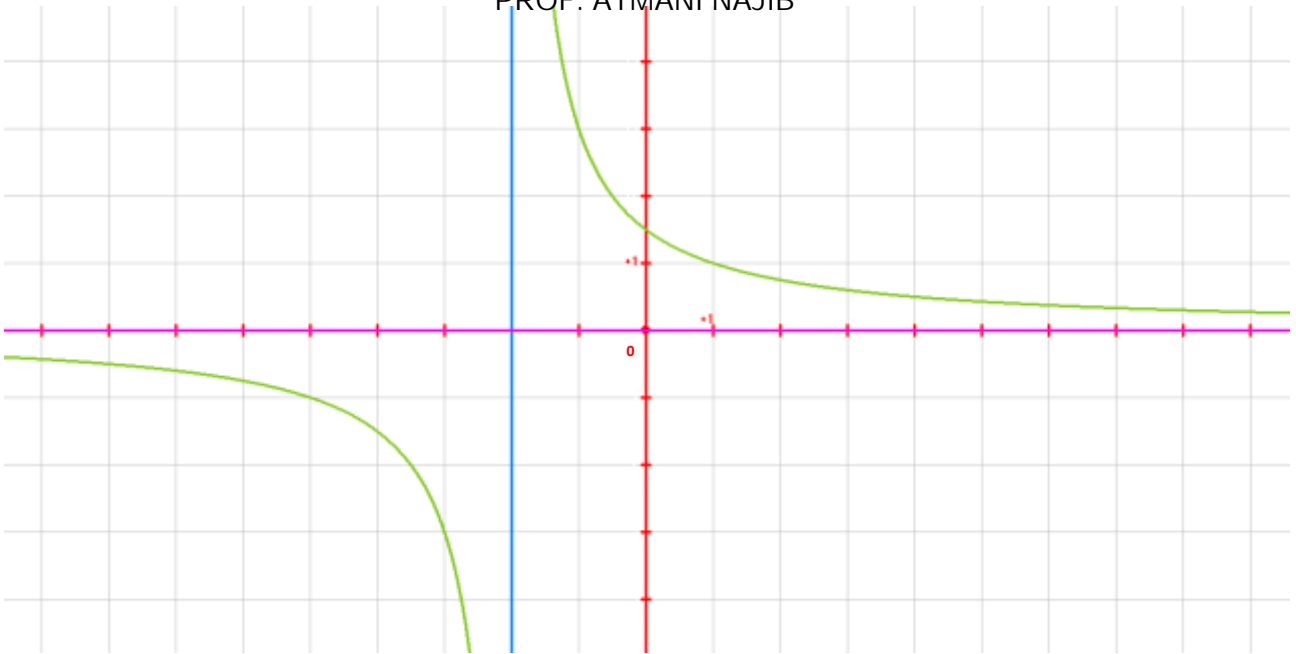
Autre remarque : La courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{3}{x+2}$ admet également une asymptote horizontale (représentée ci-dessous en rose) d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et en $+\infty$. En effet,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{X} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{X} = 0^-$$



2) Déterminons $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5x}{x-3}$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} x - 3 = 0^+$$

Et

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} -5x = -15$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-15}{X} = -\infty$$

Donc la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{-5x}{x-3}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$.

Remarque : On aurait également pu montrer la présence d'une asymptote verticale d'équation $x = 3$ à la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{-5x}{x-3}$ en montrant que :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-5x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-15}{X} = +\infty$$

Autre remarque : La courbe représentative de cette fonction admet également une asymptote horizontale d'équation $y = -5$ en $-\infty$ et en $+\infty$. En effet, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x}{x} = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{x} = -5$$

Rappel : Soient $a_n \in \mathbb{R}^*$, $b_m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

La **limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle** f définie par :

$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$ est égale à la limite en $\pm\infty$ du

quotient de ses monômes de plus haut degré $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

$$3) \text{ Déterminons } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x-1} + 3x + 2 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 = 0^-$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \lim_{X \rightarrow 0^-} \frac{1}{X} = -\infty$$

Et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 3x + 2 = 5$$

Donc, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x-1} + 3x + 2 \right) = -\infty$$

On en déduit que la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x-1} + 3x + 2$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Remarque : On pouvait également montrer la présence d'une asymptote verticale d'équation $x = 3$ en étudiant

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} + 3x + 2 \right) = +\infty$$

Autre remarque : La courbe représentative de cette fonction admet également une asymptote oblique d'équation $y = 3x + 2$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$. En effet,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{x-1} + 3x + 2 \right) - (3x + 2) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-1} + 3x + 2 - 3x - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{1}{x-1} + 3x + 2 \right) - (3x + 2) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x-1} + 3x + 2 - 3x - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{1}{X} = 0^-$$

$$4) \text{ Déterminons } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{x - 7}$$

D'après le théorème sur les limites des fonctions rationnelles en l'infini,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{x - 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Donc C_f , la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{2x+3}{x-7}$, admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $-\infty$.

Remarques :

- On montre également que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.
- C_f admet également une asymptote verticale d'équation $x = 7$.

5) Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{-x^3 + 2}$

D'après le théorème sur les limites des fonctions rationnelles en l'infini,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{-x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0^-$$

Il résulte de cette étude de limite que la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2 - x + 1}{-x^3 + 2}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Remarque : La courbe représentative de cette fonction admet également une asymptote verticale d'équation $x = 2^{1/3}$.

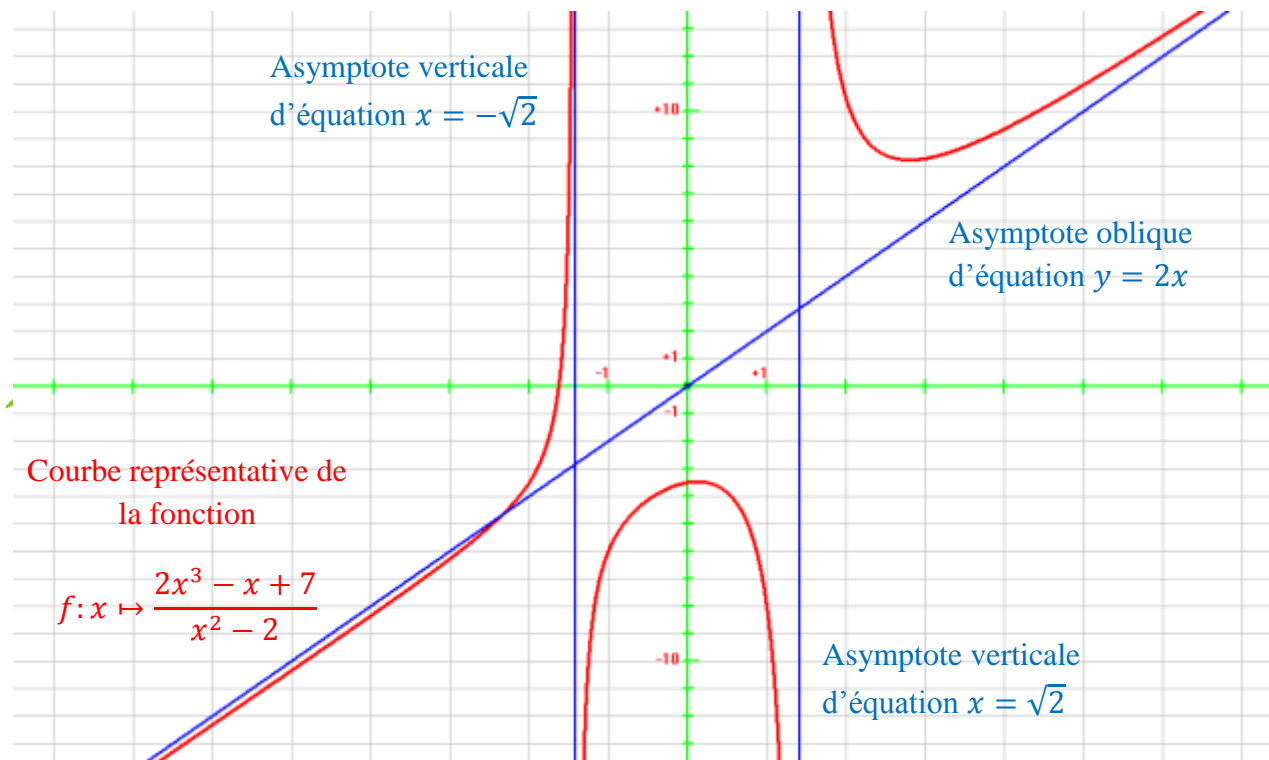
6) Déterminons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x + 7}{x^2 - 2}$

D'après le théorème sur les limites des fonctions rationnelles en l'infini,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x + 7}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

Donc la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{2x^3 - x + 7}{x^2 - 2}$ n'admet pas d'asymptote horizontale.

Remarque : La courbe représentative de cette fonction admet en revanche deux asymptotes verticales d'équation respective $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$, ainsi qu'une asymptote oblique d'équation $y = 2x$.



Exercice 3 (2 questions)

Niveau : moyen

Déterminer la limite de chacune des fonctions suivantes puis en déduire si la courbe représentative de la fonction admet une asymptote.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2 + x - 1}{5x^2 - 2x + 7}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6}{\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+7}}$$

Correction de l'exercice 3

Rappel : Limite d'une fonction composée de deux fonctions

Soit u une fonction définie sur un intervalle J , soit v une fonction définie sur un intervalle I , telle que $v(x) \in J$. La fonction f définie sur I telle que $f(x) = u(v(x))$ (ou $f(x) = (u \circ v)(x)$) est la fonction composée de la fonction v suivie de la fonction u .

a, b et c désignent chacun soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si

$$\lim_{x \rightarrow a} v(x) = b$$

Et si

$$\lim_{X \rightarrow b} u(X) = c$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

1) Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6})$

Remarquons tout d'abord que la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est la composée, définie sur $[-1; +\infty[$, de la fonction $x \mapsto x+1$ suivie de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$$

Et

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 6 = +\infty$$

Et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-6} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Donc, par différence, on aboutit à une forme indéterminée (FI) de la forme $\infty - \infty$; en effet :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6}) = "\infty - \infty" (FI)$$

Pour lever l'indétermination, il convient de transformer l'expression $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6}$. Pour cela, on la multiplie par son expression conjuguée, afin de mettre en évidence la forme factorisée $(A - B)(A + B)$ de l'identité remarquable $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$. L'expression $(A - B)$ est dite « l'expression conjuguée » de $(A + B)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-6})^2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) - (x-6)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1-x+6)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6})} \end{aligned}$$

Or, d'après ce qui précède,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-6} = +\infty \end{cases}$$

D'où, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}) = +\infty$$

Donc, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6})} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{7}{X} = 0^+$$

On en déduit que la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x-6}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

2) Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2 + x - 1}{5x^2 - 2x + 7}}$

D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{5x^2 - 2x + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2 + x - 1}{5x^2 - 2x + 7}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Par conséquent, la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{\frac{2x^2+x-1}{5x^2-2x+7}}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \sqrt{\frac{2}{5}}$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque : On peut également montrer que la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{\frac{2x^2+x-1}{5x^2-2x+7}}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \sqrt{\frac{2}{5}}$ au voisinage de $-\infty$.

3) Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6}{\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+7}}$

D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 = +\infty$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x - 3} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 7 = +\infty$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x + 7} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Donc on aboutit à une forme indéterminée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x - 3} - \sqrt{2x + 7}) = " \infty - \infty " \text{ (forme indéterminée)}$$

Pour lever l'indétermination, il convient de transformer l'expression $\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+7}$. Pour cela, on la multiplie par son expression conjuguée.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6}{(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+7})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+7})}{(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+7})(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+7})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+7})}{\sqrt{2x-3}^2 - \sqrt{2x+7}^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+7})}{2x-3 - (2x+7)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+7})}{-10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+7})}{5} \end{aligned}$$

D'après ce qui précède,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-3} = +\infty$$

Et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+7} = +\infty$$

D'où, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+7}) = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+7})}{5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3X}{5} = +\infty$$

Par conséquent, la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{-6}{\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+7}}$ n'admet pas d'asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

Rappel : Formes indéterminées

Les cas de formes indéterminées (FI) nécessitent une étude particulière. Ces cas sont, pour les opérations élémentaires (+ ; - ; × ; ÷), au nombre de 4 et de la forme :

$$\begin{array}{cccc} \infty - \infty & 0 \times \infty & \frac{\infty}{\infty} & \frac{0}{0} \end{array}$$

Exercice 4 (4 questions)

Niveau : facile

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = 4 - x - \frac{2}{(x+1)^2}$

- 1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les asymptotes éventuelles.
- 2) Montrer que C_f , la courbe représentative de f , admet la droite d'équation $y = 4 - x$ comme asymptote oblique.
- 3) Tracer C_f et ses asymptotes afin de contrôler les résultats obtenus aux questions précédentes.

Correction de l'exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = 4 - x - \frac{2}{(x+1)^2}$

- 1) Etudions les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

On a : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$. Donc il convient d'étudier les limites en $-\infty$, -1^- , -1^+ et $+\infty$.

- Etude en $-\infty$:

D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4 - x = +\infty$$

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 = \lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 = +\infty$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(x+1)^2} = \lim_{x' \rightarrow -\infty} \frac{2}{X'} = 0^+$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{(x+1)^2} \right) = 0^-$$

Donc, par somme,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 - x - \frac{2}{(x+1)^2} \right) = +\infty}$$

Donc C_f , la courbe représentative de f , n'admet pas d'asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$

- Etude en -1^- :

D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} 4 - x = 5$$

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} x + 1 = 0^-$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1)^2 = \lim_{X \rightarrow 0^-} X^2 = 0^+$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{(x+1)^2} = \lim_{x' \rightarrow 0^+} \frac{2}{X'} = +\infty$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-\frac{2}{(x+1)^2} \right) = -\infty$$

Donc, par somme,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(4 - x - \frac{2}{(x+1)^2} \right) = -\infty}$$

Donc C_f , la courbe représentative de f , admet la droite (d_1) d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale.

- Etude en -1^+ :

D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} 4 - x = 5$$

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} x + 1 = 0^+$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1)^2 = \lim_{X \rightarrow 0^+} X^2 = 0^+$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{(x + 1)^2} = \lim_{X' \rightarrow 0^+} \frac{2}{X'} = +\infty$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-\frac{2}{(x + 1)^2} \right) = -\infty$$

Donc, par somme,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(4 - x - \frac{2}{(x + 1)^2} \right) = -\infty}$$

Donc C_f , la courbe représentative de f , admet la droite (d_1) d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale.
(résultat déjà obtenu ci-dessus)

- Etude en $+\infty$:

D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

D'où, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 - x = -\infty$$

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$$

D'où, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1)^2 = \lim_{X \rightarrow +\infty} X^2 = +\infty$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(x+1)^2} = \lim_{x' \rightarrow +\infty} \frac{2}{X'} = 0^+$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{(x+1)^2} \right) = 0^-$$

Donc, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - x - \frac{2}{(x+1)^2} \right) = -\infty$$

Donc C_f , la courbe représentative de f , n'admet pas d'asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

2) Montrons que C_f admet la droite d'équation $y = 4 - x$ comme asymptote oblique.

Pour tout $x \in D_f$,

$$f(x) - (4 - x) = 4 - x - \frac{2}{(x+1)^2} - (4 - x) = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

Or, d'après la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{(x+1)^2} \right) = 0^-$$

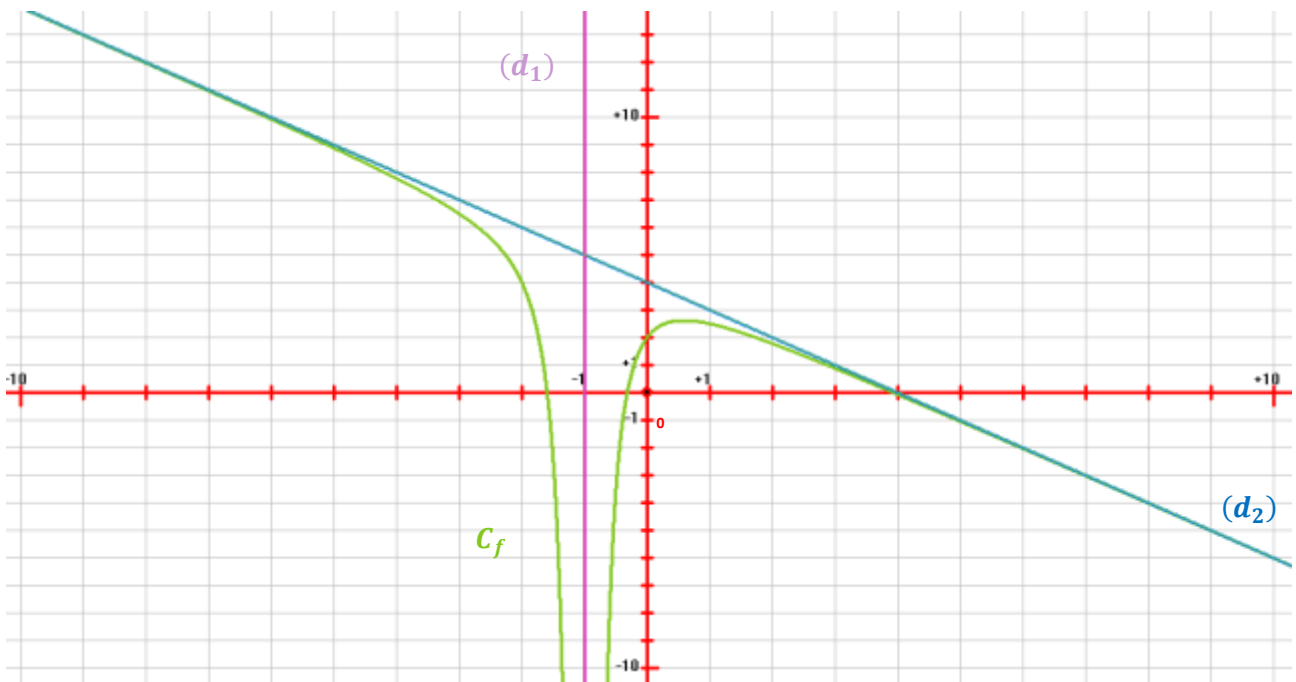
Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (4 - x)) = 0^-$$

Par conséquent, la droite (d_2) d'équation $y = 4 - x$ est asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

Remarque : On peut également montrer que la droite (d_2) d'équation $y = 4 - x$ est asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$

3) Traçons C_f (en vert) et ses asymptotes.



D'après le graphique ci-dessus, on constate que les résultats obtenus aux questions précédentes sont conformes.

Exercice 5 (5 questions)

Niveau : moyen

Soit la fonction f définie sur $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{2 - x}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout réel x de D_f ,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2 - x}$$

- 2) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f . En déduire les éventuelles asymptotes à C_f parallèles aux axes du repère.
- 3) Montrer que C_f admet une asymptote oblique d'équation à préciser.

Correction de l'exercice 5

Soit la fonction f définie sur $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{2 - x}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Déterminons les réels a, b et c tels que, pour tout réel x de D_f ,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2-x}$$

Pour tout réel x de D_f ,

$$\begin{aligned} ax + b + \frac{c}{2-x} &= \frac{(ax+b)(2-x)}{(2-x)} + \frac{c}{2-x} = \frac{2ax - ax^2 + 2b - bx}{2-x} + \frac{c}{2-x} = \frac{2ax - ax^2 + 2b - bx + c}{2-x} \\ &= \frac{-ax^2 + (2a-b)x + 2b + c}{2-x} \end{aligned}$$

Ainsi, on doit obtenir :

$$\frac{-ax^2 + (2a-b)x + 2b + c}{2-x} = \frac{x^2 - 3x + 6}{2-x}$$

Par identification des coefficients (uniques) des monômes du numérateur, on a : $\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = -3 \\ 2b + c = 6 \end{cases}$

Résolvons ce système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = -3 \\ 2b + c = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 2 \times (-1) - b = -3 \\ 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -2 - b = -3 \\ 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -b = -3 + 2 \\ 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -b = -1 \\ 2b + c = 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ 2 \times 1 + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 6 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x de D_f ,

$$f(x) = -x + 1 + \frac{4}{2-x}$$

2) Déterminons les limites de f aux bornes de D_f afin d'en déduire les éventuelles asymptotes à C_f parallèles aux axes du repère.

Remarque : Les asymptotes parallèles aux axes d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ sont les asymptotes horizontales et verticales. Une asymptote horizontale est parallèle à l'axe $(O ; \vec{i})$ des abscisses ; une asymptote verticale est parallèle à l'axe $(O ; \vec{j})$ des ordonnées.

La question précédente a permis d'établir que :

$$f(x) = -x + 1 + \frac{4}{2-x}$$

- Etudions la limite de f en $-\infty$:

D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 1 = +\infty$$

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - x = +\infty$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{X} = 0^+$$

Donc, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

- Etudions la limite de f en 2^- et en 2^+ :

D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -x + 1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} -x + 1 = -1$$

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 2 - x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 2 - x = 0^-$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{X} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{X} = -\infty$$

Donc, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

Par conséquent, C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$, parallèle à l'axe des ordonnées.

- Etudions la limite de f en $+\infty$:

D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 1 = -\infty$$

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - x = -\infty$$

D'où, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{4}{X} = 0^-$$

Donc, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

3) Montrer que C_f admet une asymptote oblique d'équation à préciser.

D'après la question 1), pour tout réel x de D_f ,

$$f(x) = -x + 1 + \frac{4}{2-x}$$

Ainsi, pour tout réel x de D_f ,

$$f(x) - (-x + 1) = -x + 1 + \frac{4}{2-x} - (-x + 1) = \frac{4}{2-x}$$

Nous avons en outre établi à la question 2) que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{4}{X} = 0^-$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 1)] = 0^-$$

Par conséquent C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = -x + 1$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque : On a de surcroît :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{2-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{4}{X} = 0^+$$

C'est-à-dire que C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = -x + 1$ au voisinage de $-\infty$.