EXERCICES D'ÉTUDE

EX 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 + \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{1+x^2}}$ et (C_f) sa courbe dans un R.O.N $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

2. Etudie les branches infinies de la courbe (C_f)

3. a) montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f'(x) = \dfrac{x(3+x^2)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

b) dresser le tableau de variation de f

c) montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f''(x) = \dfrac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$ puis déterminer le point d'inflexion de (C_f)

4. a) étudier la position de (C_f) par rapport à la droite d'équation $(D)\quad y = x$

b) tracer la courbe (C_f)

5. soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le U_n \le 1$

b) montrer que la suite $(U_n)_n$ est décroissante

EX 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

1) a) déterminer le domaine de f et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) donner une interprétation des résultats

2) a) montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

b) dresser le tableau de variation de f

3) a) déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$

b) vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) - x = \dfrac{-x^2(x+1)}{\sqrt{x^2+1}\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}$

c) étudier la position de (C_f) par rapport à la droite d'équation $(D)\quad y = x$

4) tracer la courbe (C_f) et la droite $y = x$

5) soit $(U_n)_n$ la suite telle que : $U_0 = -\dfrac{3}{4}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\quad -1 < U_n < 0$

b) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

c) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ |U_{n+1}+1| \le \dfrac{4}{5}|U_n+1|$

d) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ |U_n+1| \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$