Géométrie dans l'espace
Orthogonalit ́e dans l'espace : Exercices

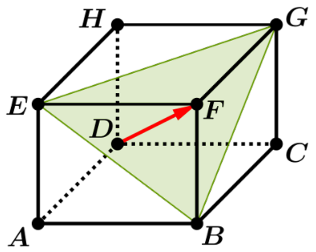
Vecteur normal - équation cartésienne d'un plan

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).

2) En déduire une équation cartésienne du plan (EBG).



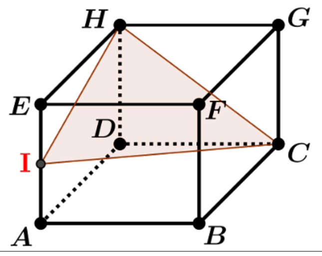
ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

I est le milieu du segment [AE].

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1) Déterminer un vecteur normal au plan (CHI).

2) En déduire une équation cartésienne du plan (CHI).



On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$:

1) le plan $\mathscr{P}$ passe par le point A(1 ;2 ;-4) et a pour vecteur normal $\vec{n}(2\,;-1\,;1)$.

2) le plan $\mathscr{P}$ passe par les points A(1 ;1 ;4), B(1 ;-1 ;2) et C(-1 ;2 ;1).

Lien entre équation cartésienne de plan et représentation paramétrique

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

1) Justifier que $y = 2x + 1$ est l'équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}$.
   Donner un point et un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$.

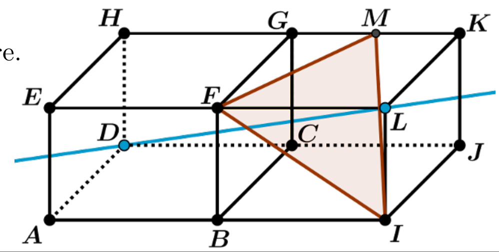
2) Déterminer 2 vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}$. En déduire une représentation paramétrique de $\mathscr{P}$.

Droite perpendiculaire à un plan

Deux cubes d'arête 1, sont disposés comme indiqué sur la figure.

M est le milieu du segment [GK].

La droite (DL) est-elle perpendiculaire au plan (FMI) ?



Intersection d'une droite et d'un plan

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -1 \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$

Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $2x - y + z - 3 = 0$.

1) Justifier que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont sécants en un point I.

2) Déterminer les coordonnées de I.

Intersection de 2 plans

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives $2x + 3y - z + 3 = 0$ et $x + y + z - 1 = 0$.

1) Démontrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$.

2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

Plan perpendiculaire

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $x-2y+z+5=0$ et $4x+y-z-2=0$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ perpendiculaire à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ passant par le point A(2 ;-1 ;1).

Distance d'un point à une droite par 2 méthodes

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère le point A(-1 ;1 ;2)
et la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=1-2t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$
L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance d, du point A à la droite $\mathscr{D}$,
c'est à dire la plus petite des longueurs AM lorsque M décrit la droite $\mathscr{D}$.

Méthode 1

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=AM$ où M est un point de $\mathscr{D}$ de paramètre t.
Déterminer $f(t)$ en fonction de t puis le minimum de f. Conclure.

Méthode 2

2.a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par A.
2.b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$.
2.c) Conclure.

Distance d'un point à un plan

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère le point A(-7 ;0 ;4) et le plan d'équation cartésienne $x+2y-2z-3=0$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance du point A au plan $\mathscr{P}$,
c'est à dire la plus petite des longueurs AM lorsque M décrit le plan $\mathscr{P}$.
1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et perpendiculaire à $\mathscr{P}$.
2) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$.
3) Conclure.

Perpendiculaire commune à deux droites de l'espace

Dans un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ passant par A_1(-1 ;0 ;-1) et de vecteur directeur $\vec{u}_1$(1 ;2 ;3)
et la droite $\mathscr{D}_2$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2t \\ z=2 \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.
1) Déterminer un vecteur directeur de $\mathscr{D}_2$, noté $\vec{u}_2$.
2) Déterminer les coordonnées d'un vecteur non nul $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.
3) On considère le plan $\mathscr{P}(A_1;\vec{u}_1;\vec{v})$.
a) Montrer que le vecteur $\vec{n}$(17 ;-22 ;9) est normal à $\mathscr{P}$. En déduire une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.
b) Déterminer les coordonnées du point I, intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}_2$.
c) Démontrer que la droite Δ passant par I et de vecteur directeur $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

Intersection de sphère et de plan

Dans un repère orthonormé, on considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x-y+3z+15=0$ et le point S(1 ;4 ;5).
1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par le point S.
2) Déterminer les coordonnées du point K, intersection de $\mathscr{P}$ et Δ.
3) Le plan $\mathscr{P}$ coupe-t-il la sphère $\mathscr{S}$ de centre S et de rayon 7 ? Justifier.

Plan tangent à une sphère

Dans un repère orthonormé, on considère l'ensemble (E) d'équation : $x^2-6x+y^2+z^2+10z-2=0$.
1) Démontrer que (E) est une sphère $\mathscr{S}$ dont on donnera les coordonnées du centre S et le rayon r.
2) On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x-y-2z+2=0$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par S et perpendiculaire à $\mathscr{P}$.
3) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de Δ et $\mathscr{P}$.
4) Le plan $\mathscr{P}$ est-il tangent à la sphère $\mathscr{S}$? Justifier.

Intersection de sphère et de droite

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère la droite Δ passant par le point A(4 ;1 ;3) et de vecteur directeur $\vec{u}$(1 ;-2 ;1).
Déterminer l'intersection de la droite Δ avec la sphère $\mathscr{S}$ de centre Ω(1 ;2 ;-1) et de rayon $\sqrt{14}$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
1. Si deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires à un troisième plan $\mathscr{P}_3$ alors $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles.
2. Si deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont perpendiculaires à une troisième droite $\mathscr{D}_3$ alors $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles.
3. Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite de l'un est orthogonale à toute droite de l'autre.
4. La droite passant par A(3 ;-1 ;2) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ;1 ;-2)
   est parallèle au plan d'équation cartésienne $2x - y + z - 1 = 0$.
5. Les plans d'équations cartésiennes $2x - z + 1 = 0$ et $x - y + z - 3 = 0$ sont perpendiculaires.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On donne les points A(2 ; 0 ; -3), B(1 ;2 ; -1) et C(-2 ;1 ; 3).
1. La droite (AB) appartient au plan d'équation cartésienne $2x - y + z - 1 = 0$.
2. Le point H(2 ;-1 ;2) est le projeté orthogonal du point A(4 ;-3 ;2) sur le plan d'équation cartésienne $x - y = 3$.
3. A, B et C définissent un plan qui a pour équation cartésienne $x + 2y + z + 1 = 0$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x - y + 3z + 1 = 0$,
et la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.
On donne les points A(1 ; 1 ; 0), B(3 ;0 ; -1) et C(7 ;1 ; -2).
1. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.
2. Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.
3. La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ au point E de coordonnées (8 ; -3 ; -4).
4. Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.

Équation de plan dépendant d'un paramètre - Bac S Nouvelle Calédonie 2016

Dans le repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation

$$\frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0$$

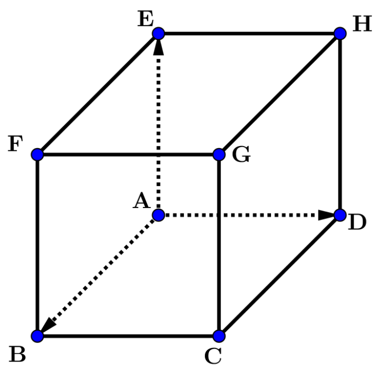
1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point A(1; 1; 1) appartient-il au plan P_m ?
2. Montrer que les plans P_1 etP_{-4} sont sécants selon la droite (d) dont on donnera une représentation paramétrique.
3. Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.
4. Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan P_m.
5. Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.

Équation de plan et section d'un cube - Bac S Pondichéry 2017

ABCDEFGH est un cube.

Dans le repère $\left(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AD}};\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, on note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{3}z-1=0$.

Construire, sur la figure ci-dessous, la section du cube par le plan $\mathcal{P}$, en justifiant.



Projeté orthogonal - Exercice de révision - Bac S Centre étranger 2018

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH. Les points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

I est le milieu de [AD]. $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$. K est le milieu de [FG].

On se place dans le repère $(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AD}};\overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

1. Donner sans justification les coordonnées de I, J et K.
2. Justifier que I, J et K définissent un plan.
3. Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\vec{n}(4;a;b)$ soit normal au plan (IJK).
4. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
5. On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y;z)$ tels que $\begin{cases} 0<x<1 \\ 0<y<1 \\ 0<z<1 \end{cases}$. Le point R est-il à l'intérieur du cube ?