Ensembles-Applications

Exercice 1 :

Soient $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{0,1,2,3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

Exercice 2 :

Soient $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice 3 :

1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :
   $A_1 =]-\infty, 0]$; $A_2 =]-\infty, 0[$; $A_3 =]0, +\infty[$; $A_4 = [0, +\infty[$; $A_5 =]1,2[$; $A_6 = [1,2[$.
2. Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants :
$$C_{\mathbb{R}}A \qquad et \qquad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

Exercice 4 :

Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2,7]$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbb{R} \setminus A$, $A \setminus B$, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$.

Exercice 5 :

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice 6 :

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On suppose que :
$$A \cap B \neq \emptyset; A \cup B \neq E; A \nsubseteq B; B \nsubseteq A$$
On pose
$$A_1 = A \cap B; A_2 = A \cap C_E B; A_3 = B \cap C_E A; A_4 = C_E(A \cup B)$$

1. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont non vides.
2. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont deux à deux disjoints.
3. Montrer que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$.

Exercice 7 :

1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :
   $A_1 =]-\infty, 0]$; $A_2 =]-\infty, 0[$; $A_3 =]0, +\infty[$; $A_4 = [0, +\infty[$; $A_5 =]1,2[$; $A_6 = [1,2[$.
2. Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants :
$$C_{\mathbb{R}}A \qquad \text{et} \qquad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

Exercice 8 :

Justifier les énoncés suivants.

a) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A est inclus dans B, alors le complémentaire de B dans E est inclus dans le complémentaire de A dans E.

b) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A et B sont disjoints, alors tout élément de E est soit dans C_E^A soit dans C_E^B.

c) Soient E un ensemble, A un sous-ensemble de E. Déterminer les ensembles suivants : $C_E(C_E A)$; $A \cap C_E A$; $A \cup C_E A$; $C_E \emptyset$; $C_E E$

Exercice 9 :

1. Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
2. Montrer que $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Exercice 10 :

On rappelle que l'on note

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que

$$(A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right) = A \cap B \cap \overline{C}$$
$$(A \cap C) \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = A \cap C \cap \overline{B}$$

2. En déduire que

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$$

Exercice 11 :

On rappelle que pour toutes parties U et V d'un ensemble E, on note

$$U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$$

1. Montrer que pour toutes parties A, B et C d'un ensemble E.

$$(A \cup B) \cap \left(\overline{A \cup C}\right) = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$$
$$(A \cup C) \cap \left(\overline{A \cup B}\right) = \overline{A} \cap C \cap \overline{B}$$

2. En déduire que

$$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = \overline{A} \cap (B \Delta C)$$

Exercice 12 :

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. Que pensez-vous de l'implication

$$A \cup B \not\subseteq C \Rightarrow (A \not\subseteq C \text{ ou } B \not\subseteq C) \text{ ?}$$

Justifiez (on pourra utiliser la contraposée).

2. On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.
3.

Exercice 13 :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Démontrer les égalités suivantes :

1. $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

2. $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$
   Si $A \subset B$, montrer $C_E B \subset C_E A$

Exercice 14 :

Soit E un ensemble et F et G deux parties de E. Démontrer que :

1. $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$
2. $F \subset G \Leftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$

Exercice 15 :

Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour A et B dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de A par B l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1. Montrer que $A\Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.
3. Montrer que pour tous A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on a :
   a) Montrer que : $\overline{\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)} = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap A)$
   b) Montrer que : $(A\Delta B)\Delta C = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (C \cap B \cap A)$
   c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$
   d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$,
   e) En déduire que : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Exercice 16 :

Soit $f: I \to J$ définie par $f(x) = x^2$

1. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles I et J tels que f soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.

Exercice 17 :

Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2$	$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $x \mapsto x^2$	$f: [0,1] \to [0,2]$ $x \mapsto x^2$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x + x^3$	$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2 + x^3$	$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x + x^4$

Exercice 18 :

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$, deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \to J$ une fonction strictement croissante.

1. Montrer que f est injective.

On pourra montrer la contraposée (et on rappelle que $x_1 \neq x_2$ équivaut à $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$)

2. Déterminer l'ensemble K tel que $f: I \to K$ soit bijective.

Exercice 19 :

Soit $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ par $f(n, m) = mn$

Soit $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = (n, (n+1)^2)$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. g est-elle injective ?
4. g est-elle surjective ?

Exercice 20 :

Soient

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad n \mapsto 2n \qquad\qquad g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$$

Où $E(x)$ désigne la partie entière de x

Les fonctions sont-elles injectives, surjective ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 21 :

Soit f une application de E vers E telle que :

$$f\big(f(E)\big) = E$$

Montrer que f est surjective.

Exercice 22 :

On considère l'application $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2$

1. Existe-t-il $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$?

Exercice 23 :

Soit $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = 2n$

1. Existe-t-il une fonction $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$?
2. Existe-t-il une fonction $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{Z}}$?

Exercice 24 :

Soit $f: E \to F$ une application, où $Card(E) = Card(F)$

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

(i) f est injective

(ii) f est surjective

(iii) f est bijective

Exercice 25 :

Répondre aux questions qui suivent, en justifiant, le cas échéant, votre réponse par un bref argument, un calcul ou un contre-exemple.

1. Si les applications $u: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ et $v: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ sont bijectives, alors l'application $u \circ v \circ u: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est aussi bijective. Vrai ou Faux, justifier.
2. L'application $f: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}: (a, b, c) \mapsto 2^a 3^b 5^c$ est une application

(i) bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. L'application $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ qui à l'entier $l \in \mathbb{Z}$ associe le reste de la division euclidienne de l par n est une application.
4. bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

5. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$. Déterminer l'application réciproque de la bijection

$$f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$$
$$(u, v) \mapsto (au + bv + 1, cu + dv - 1)$$

Exercice 26 :

1. Soient $q_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

Montrer que :

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$$

2. Soit $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{Q}$ l'application définie par :

$$f(p, q) = p + \frac{1}{q}$$

   a. Montrer que f est injective ?
   b. f est-elle surjective ?

Exercice 27 :

Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $f: E \to \mathcal{P}(E)$.
Considérer la partie $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.

Exercice 28 :

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1,2, \dots, n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y-a-t-il d'application injectives $f: I_2 \to I_n$?
2. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f: I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Exercice 29 :

Soient E, F et G trois ensemble et soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
6. Si à présent $f: E \to F$ et $g: F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :
   a. $g \circ f = Id_E$
   b. $f \circ g = Id_F$

c. $f \circ f = Id_E$

Exercice 30 :

Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y. Une application s, de Y dans X, telle que $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une section de f.

1. Montrer que si f admet au moins une section alors f est surjective.
2. Montrer que toute section de f est injective.

Une application r, de Y dans X, telle que $r \circ f = Id_X$ s'appelle une rétraction de f.

3. Montrer que si f possède une rétraction alors f est injective.
4. Montrer que si f est injective alors f possède une rétraction.
5. Montrer que toute rétraction de f est surjective.
6. En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r, alors f est bijective et l'on a : $r = s(= f^{-1}$ par conséquent).

Exercice 31 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E, montrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

   Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte. Montrer alors que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E et pour toute partie B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 32 :

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par :
$$f(1) = 4,\ \ f(2) = 1\ \ , f(3) = 2,\ \ f(4) = 2.$$
   Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1,2\}$, $A = \{3\}$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = [1,2]$.

Exercice 33 :

1. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x$. Déterminer $f([0,1] \times [0,1])$, $f^{-1}([-1,1])$.
2. Soit $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$ définie par $f(x) = \cos(\pi x)$, déterminer $f(\mathbb{N})$, $f(2\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{\pm 1\})$.

Exercice 34 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A' et B' deux parties quelconques de F, non vides. Montrer que :

1. $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
2. $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

Exercice 35 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F .

1. Montrer que pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.

2. Montrer que pour toute partie B de F, on a $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A = f^{-1}\left(f(A)\right)$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

Exercice 36 :

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x \leq y\}$

Soit $f: D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$

1. Représenter D dans le plan.
2. a. Montrer que si deux couples de réels (x_1, y_1) et (x_2, y_2) vérifient

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

Alors $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ (autrement dit $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$).

b. Montrer que f est injective, on pourra se ramener au système du 2.a..

3. Est-ce que f est surjective ?

Correction exercice 1 :

$$A \cap B = \{1,2,3\}\,; \qquad A \cup B = \{0,1,2,3\}$$

Remarque :

Comme $A \subset B$ on a $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$

$$A \times B = \{(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)$$

Remarque :

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B) = 3 \times 4 = 12$$

Correction exercice 2 :

$$A \cap B = [2,3]\,; \quad A \cup B = [1,4]$$

Correction exercice 3 :

1.

$$C_{\mathbb{R}}A_1 =]0,+\infty[\,; \; C_{\mathbb{R}}A_2 = [0,+\infty[\,; \; C_{\mathbb{R}}A_3 =]-\infty,0]\,; \quad C_{\mathbb{R}}A_4 =]-\infty,0[;$$
$$C_{\mathbb{R}}A_5 =]-\infty,1] \cup [2,+\infty[; \; C_{\mathbb{R}}A_6 =]-\infty,1[\cup [2,+\infty[$$

2.

$$C_{\mathbb{R}}A = [1,2]; \quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = [1,+\infty[\cap]2,+\infty[= [1,2]$$

Remarque :

$$C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = C_{\mathbb{R}}(B \cup C) = C_{\mathbb{R}}A$$

Correction exercice 4 :

$$A \cap B =]-2,3]$$
$$A \cup B =]-\infty,7]$$
$$B \cap C =]-2,7]$$

$$B \cup C =]-5, +\infty[$$

$$\mathbb{R} \setminus A =]3, +\infty[$$

$$A \setminus B =]-\infty, -2]$$

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) =]3, +\infty[\cap (]-\infty, -2] \cup]7, +\infty[) = (]3, +\infty[\cap]-\infty, -2]) \cup (]3, +\infty[\cap]7, +\infty[)$$
$$= \emptyset \cup]7, +\infty[=]7, +\infty[$$

Ou mieux

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus (A \cup B) =]7, +\infty[$$

$$(\mathbb{R} \setminus (A \cup B) =]7, +\infty[$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) =]-2,3] \cup]-5,3] =]-5,3]$$

Ou

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C) =]-\infty, 3] \cap]-5, +\infty[=]-5,3]$$

$$A \cap (B \cup C) =]-\infty, 3] \cap]-5, +\infty[=]-5,3]$$

Correction exercice 5 :

Il s'agit de résultats du cours que l'on peut utiliser sans démonstration mais cet exercice demande de les redémontrer.

1. Si $x \in A \cup (B \cap C)$

   Alors $\big(x \in A$ ou $x \in (B \cap C)\big)$

   Alors $\big(x \in A$ ou $(x \in B$ et $x \in C)\big)$

   Si $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$, par conséquent $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

   Si $(x \in B$ et $x \in C)$ alors $(x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C)$

   Donc si $\big(x \in A$ ou $(x \in B$ et $x \in C)\big)$ alors $(x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C)$

   On a montré que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   Si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ alors $(x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C)$.

   $$(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C) \Leftrightarrow \big((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)\big)$$

   Si $\big(x \in A$ et $(x \in A$ ou $x \in C)\big)$ alors $x \in A \cap A$ ou $x \in A \cap C$

   Si $\big(x \in B$ et $(x \in A$ ou $x \in C)\big)$ alors $x \in B \cap A$ ou $x \in B \cap C$

   Alors $x \in A$ ou $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap A$ ou $x \in B \cap C$

   Alors $x \in A$ ou $x \in A \cap C \subset A$ ou $x \in B \cap A \subset A$ ou $x \in B \cap C$

   Alors $x \in A$ ou $x \in B \cap C$

   Alors $x \in A \cup (B \cap C)$

   On a montré que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

   Finalement $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. Si $x \in A \cap (B \cup C)$

   Alors $(x \in A$ et $x \in B \cup C)$

   Alors $\big(x \in A$ et $(x \in B$ ou $x \in C)\big)$

   Alors $(x \in A$ et $x \in B)$ ou $(x \in A$ et $x \in C)$

   Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$

   Alors $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   On a montré que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   Si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$

   Alors $(x \in A$ et $x \in B)$ ou $(x \in A$ et $x \in C)$

   Alors $(x \in A$ ou $x \in A)$ et $(x \in A$ ou $x \in C)$ et $(x \in B$ ou $x \in A)$ et $(x \in B$ ou $x \in C)$

   Alors $x \in A$ et $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup A$ et $x \in B \cup C$

   Comme $x \in A$ et $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup A$ entraine que $x \in A$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

On a montré que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Et finalement $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Correction exercice 6 :

1.

$$A_1 = A \cap B \neq \emptyset$$

D'après l'énoncé

$$A_2 = A \cap C_E B = A \setminus B \neq \emptyset$$

Car $A \not\subseteq B$.

$$A_3 = B \cap C_E A = B \setminus A \neq \emptyset$$

Car $B \not\subseteq A$

$$A_4 = C_E(A \cup B) = E \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$$

Car $A \cup B \neq E$, en fait $A \cup B \not\subseteq E$ car $A \subset E$ et $B \subset E$.

2.

$$A_1 \cap A_2 = (A \cap B) \cap (A \cap C_E B) = A \cap B \cap A \cap C_E B = (A \cap A) \cap (B \cap C_E B) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A_1 \cap A_3 = (A \cap B) \cap (B \cap C_E A) = A \cap B \cap B \cap C_E A = (B \cap B) \cap (A \cap C_E A) = B \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A_1 \cap A_4 = (A \cap B) \cap \big(C_E(A \cup B)\big) = (A \cap B) \cap (C_E A \cap C_E B) = A \cap B \cap C_E A \cap C_E B$$
$$= (A \cap C_E A) \cap (B \cap C_E B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A_2 \cap A_3 = (A \cap C_E B) \cap (B \cap C_E A) = A \cap C_E B \cap B \cap C_E A = (A \cap C_E A) \cap (B \cap C_E B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A_2 \cap A_4 = (A \cap C_E B) \cap C_E(A \cup B) = (A \cap C_E B) \cap (C_E A \cap C_E B) = A \cap C_E B \cap C_E A \cap C_E B$$
$$= (A \cap C_E A) \cap (C_E B \cap C_E B) = \emptyset \cap C_E B = \emptyset$$

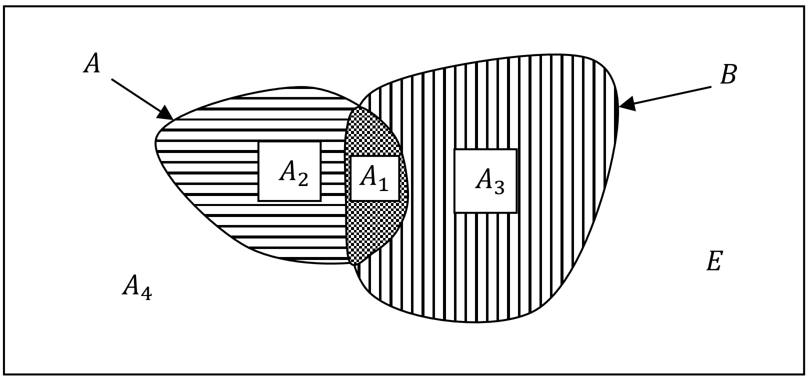
$$A_3 \cap A_4 = (B \cap C_E A) \cap C_E(A \cup B) = (B \cap C_E A) \cap (C_E A \cap C_E B) = B \cap C_E A \cap C_E A \cap C_E B$$
$$= (B \cap C_E B) \cap (C_E A \cap C_E A) = \emptyset \cap C_E A = \emptyset$$

3. A_1, A_2, A_3 et A_4 sont deux à deux disjoints.

$$\begin{aligned}
A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cap A_4 &= (A \cap B) \cup (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A) \cup C_E(A \cup B) \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A) \cup (C_E A \cap C_E B) \\
&= [(A \cap B) \cup (A \cap C_E B)] \cup [(B \cap C_E A) \cup (C_E A \cap C_E B)] \\
&= [(A \cup A) \cap (A \cup C_E B) \cap (B \cup A) \cap (B \cup C_E B)] \\
&\cup [(B \cup C_E A) \cap (B \cup C_E B) \cap (C_E A \cup C_E A) \cap (C_E A \cup C_E B)] \\
&= [A \cap (A \cup C_E B) \cap (A \cup B) \cap E] \cup [(B \cup C_E A) \cap E \cap C_E A \cap (C_E A \cup C_E B)] \\
&= [A \cap \{(A \cup C_E B) \cap (A \cup B)\}] \cup [C_E A \cap \{(B \cup C_E A) \cap (C_E A \cup C_E B)\}] \\
&= [A \cap \{A \cup (C_E B \cap B)\}] \cup [C_E A \cap \{C_E A \cup (B \cap C_E B\}] \\
&= [A \cap \{A \cup \emptyset\}] \cup [C_E A \cap \{C_E A \cup \emptyset\}] = [A \cap A] \cup [C_E A \cap C_E A] = A \cup C_E A = E
\end{aligned}$$

Remarque :

(A_1, A_2, A_3, A_4) est une partition de E.



Sur un schéma c'est une évidence (E est le carré sur le schéma).

Correction exercice 7 :

1.
$$C_{\mathbb{R}}A_1 =]0,+\infty[\ ;\quad C_{\mathbb{R}}A_2 = [0,+\infty[\ ;\quad C_{\mathbb{R}}A_3 =]-\infty,0]\ ;\quad C_{\mathbb{R}}A_4 =]-\infty,0[;$$
$$C_{\mathbb{R}}A_5 =]-\infty,1] \cup [2,+\infty[;\ C_{\mathbb{R}}A_6 =]-\infty,1[\cup [2,+\infty[$$

2.
$$C_{\mathbb{R}}A = [1,2];\quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = [1,+\infty[\cap]2,+\infty[= [1,2]$$

Remarque :
$$C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = C_{\mathbb{R}}(B \cup C) = C_{\mathbb{R}}A$$

Correction exercice 8 :

a) Soit $x \in \overline{B} = \complement_E^B$, $x \notin B$, comme $A \subset B$, $x \notin A$, autrement dit $x \in \overline{A} = \complement_E^A$ ce qui montre que si $x \in \overline{B}$ alors $x \in \overline{A}$.

b) Si $x \in A$ alors $x \notin B$ (car $A \cap B = \emptyset$) donc $x \in \overline{B} = \complement_E^B$.
Si $x \notin A$ alors $x \in \overline{A} = \complement_E^A$

c) $C_E(C_E A) = A$, $A \cap C_E A = \emptyset$, $A \cup C_E A = E$, $C_E\emptyset = E$ et $C_E E = \emptyset$

Correction exercice 9 :

1. $(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \setminus (B \cup C)$
2. $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap \overline{B}) \cap (C \cap \overline{D}) = (A \cap C) \cap (\overline{B} \cap \overline{D}) = (A \cap C) \cap (\overline{B \cup D}) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Correction exercice 10 :

1.
$$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = \emptyset \cup (A \cap B \cap \overline{C})$$
$$= A \cap B \cap \overline{C}$$
Pour la seconde il suffit d'intervertir B et C.

2.
$$(A \cap B)\Delta(A \cap C) = \big((A \cap B) \setminus (A \cap C)\big) \cup \big((A \cap C) \setminus (A \cap B)\big)$$
$$= \Big((A \cap B) \cap (\overline{A \cap C})\Big) \cup \Big((A \cap C) \cap (\overline{A \cap B})\Big) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$$
$$= A \cap \Big((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})\Big) = A \cap \big((B \setminus C) \cup (C \setminus B)\big) = A \cap (B\Delta C)$$

Correction exercice 11 :

1.
$$(A \cup B) \cap (\overline{A \cup C}) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{C}) = \Big(A \cap (\overline{A} \cap \overline{C})\Big) \cup \Big(B \cap (\overline{A} \cap \overline{C})\Big)$$
$$= (A \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) = \emptyset \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) = B \cap \overline{A} \cap \overline{C} = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$$
Pour la seconde égalité il suffit d'intervertir les rôles de B et C.

2.
$$(A \cup B)\Delta(A \cup C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C) \cup (A \cup C) \setminus (A \cup B) = (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap C \cap \overline{B})$$
$$= \overline{A} \cap \Big((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})\Big) = \overline{A} \cap (B \setminus C \cup C \setminus B) = \overline{A} \cap (B\Delta C)$$

Correction exercice 12 :

1. La contraposée de cette implication est :
$$(A \subset C \quad \text{et} \quad B \subset C) \Rightarrow A \cup B \subset C$$
Cette implication est vraie.
2. Prenons $x \in B$.
Alors $x \in A \cup B$, alors $x \in A \cup C$ d'après l'hypothèse.
Si $x \in C$ c'est fini. Si $x \in A \setminus C$ alors $x \in A \cap B$ (puisque l'on a pris $x \in B$), d'après l'hypothèse $x \in A \cap C$ ce qui entraine que $x \in C$.
On a bien montré que $B \subset C$.

Correction exercice 13 :

Il s'agit de résultats du cours, on peut les utiliser sans démonstration mais c'est l'objet de cet exercice.

1. Soit $x \in C_E(A \cap B)$, $x \notin A \cap B$ et donc $x \notin A$ ou $x \notin B$, ce qui signifie que $x \in C_E A \cup C_E B$
Cela montre que $C_E(A \cap B) \subset C_E A \cup C_E B$.
Soit $x \in C_E A \cup C_E B$, $x \notin A$ ou $x \notin B$ donc $x \notin A \cap B$ ce qui entraine que $x \in C_E(A \cap B)$.
Cela montre que $C_E A \cup C_E B \subset C_E(A \cap B)$.
Et finalement
$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$$

Remarque :
On aurait raisonner par équivalence.

2. Soit $x \in C_E(A \cup B)$, $x \notin A \cup B$ et donc $x \notin A$ et $x \notin B$, ce qui signifie que $x \in C_E A \cap C_E B$
Cela montre que $C_E(A \cup B) \subset C_E A \cap C_E B$.
Soit $x \in C_E A \cap C_E B$, $x \notin A$ et $x \notin B$ donc $x \notin A \cup B$ ce qui entraine que $x \in C_E(A \cup B)$.
Cela montre que $C_E A \cap C_E B \subset C_E(A \cup B)$.
Et finalement
$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$$

Remarque :
On aurait pu raisonner par équivalence.

Correction exercice 14 :

Il s'agit de résultats du cours, on peut les utiliser sans démonstration mais c'est l'objet de cet exercice.

1. Supposons que $F \subset G$.
Si $x \in F \cup G$ alors $x \in F \subset G$ ou $x \in G$ alors $x \in G$. Donc $F \cup G \subset G$.
Si $x \in G$ alors $x \in F \cup G$, par conséquent $F \cup G = G$.
On a montré que $F \subset G \Rightarrow F \cup G = G$
Supposons que $F \cup G = G$.
Soit $x \in F$, $x \in F \cup G = G$ donc $x \in G$.
On a montré que $F \cup G = G \Rightarrow F \subset G$.
Finalement $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$.
2. Supposons que $F \subset G$.
Si $x \in F \cap C_E G$, $x \in F$ et $x \notin G \supset F$ donc $x \in F$ et $x \notin F$ ce qui est impossible par conséquent $F \cap C_E G = \emptyset$.
On a montré que $F \subset G \Rightarrow F \cap C_E G = \emptyset$
Supposons que $F \cap C_E G = \emptyset$.

Soit $x \in F$, supposons que $x \notin G \Leftrightarrow x \in C_E G$ ce qui signifie que $x \in F \cap C_E G = \emptyset$, c'est impossible donc l'hypothèse $x \notin G$ est fausse, par conséquent $x \in G$ et $F \subset G$.
On a montré que $F \cap C_E G = \emptyset \Rightarrow F \subset G$.
Finalement $F \subset G \Leftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$.

Correction exercice 15 :

1.

$$\begin{aligned}(A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\\ &= \left(A \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) \cup \left(B \cap \overline{B}\right) = \emptyset \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) \cup \emptyset\\ &= \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}A\Delta A &= (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset\\ A\Delta\emptyset &= (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A\\ A\Delta E &= (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = \overline{A}\end{aligned}$$

3.

a)

$$\begin{aligned}\overline{\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)} &= \overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{\left(B \cap \overline{A}\right)} = \left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(\overline{B} \cup A\right)\\ &= \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap A\right) \cup \left(B \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap A) = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (B \cap A)\\ &= \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap A)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(A\Delta B)\Delta C &= \left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)\right)\Delta C = \left(\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)\right) \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)}\right)\\ &= \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \left(\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap A)\right)\right)\\ &= \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (C \cap B \cap A)\end{aligned}$$

c)

$$(A\Delta B)\Delta \mathrm{C} = \left(C \cap \overline{A\Delta B}\right) \cup \left((A\Delta B) \cap \overline{C}\right) = \left((A\Delta B) \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{A\Delta B}\right) = C\Delta(A\Delta B)$$

or $A\Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = \left(B \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = B\Delta A$ donc $(A\Delta B)\Delta \mathrm{C} = C\Delta(A\Delta B) = C\Delta(B\Delta A)$

d)

$(C\Delta B)\Delta A = \left(C \cap \overline{B} \cap \overline{A}\right) \cup \left(B \cap \overline{C} \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{C} \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B \cap C) = A\Delta(B\Delta C)$, en changeant A et C.

e)

$(A\Delta B)\Delta C = C\Delta(B\Delta A)$ d'après d) or $C\Delta(B\Delta A) = A\Delta(B\Delta C)$ d'après c).
Donc $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Correction exercice 16 :

1. $I = [0,1]$ et $J = [-1,1]$.
2. $I = [-1,1]$ et $J = [0,1]$.
3. $I = [-1,1]$ et $J = [-1,1]$.
4. $I = [0,1]$ et $J = [0,1]$.

Correction exercice 17 :

$$\begin{aligned}f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$$

$f(-1) = f(1)$ donc f n'est pas injective.
-4 n'a pas d'antécédent, car $f(x) = -4 \Leftrightarrow x^2 = -4$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. f n'est pas surjective.
Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective donc cette fonction n'est pas bijective.

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto x^2$$
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$$

Car $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. f est injective.
Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, (celui de l'ensemble d'arrivée), il existe $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}^*$, (celui de l'ensemble de départ) tel que : $y = f(x)$, en effet $f(x) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$ donc f est surjective.
f est bijective.

$$f : [0,1] \to [0,2]$$
$$x \mapsto x^2$$
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$$

Car $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. f est injective.
2 n'a pas d'antécédent, car $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $[0,1]$. f n'est pas surjective.

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + x^3$$

g est une fonction dérivable, $g'(x) = 1 + 3x^2 > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La contraposée de $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ est $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$
Supposons que $x_1 \neq x_2$, alors $x_1 < x_2$ (ou $x_2 < x_1$, ce que revient au même), on en déduit que $g(x_1) < g(x_2)$ car g est strictement croissante, par conséquent $g(x_1) \neq g(x_2)$, g est injective.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

g est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, par conséquent pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$, g est surjective. Mais l'unicité du « x » fait que g est bijective donc il était inutile de montrer l'injectivité de g.

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + x^3$$

On va étudier (sommairement) cette fonction et dresser son tableau de variation.
h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. $h'(x) = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x)$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

Le « x^3 » l'emporte sur le « x^2 ».

$$h(0) = 0 \quad \text{et} \quad h\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les seules bijections de $E \subset \mathbb{R}$ sur $F \subset \mathbb{R}$ sont les fonctions strictement monotones dont l'image de E est F.
h n'est pas une bijection.
Comme $h(-1) = 0 = h(0)$, h n'est pas injective.
Pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = h(x)$, et bien il n'y a pas unicité sinon h serait bijective.
Pour tout $y \in [0, \frac{4}{27}[$ il existe trois valeurs x tel que $y = h(x)$, pour $y = \frac{4}{27}$, il y en a deux pour les autres y n'a qu'un antécédent.

$$\begin{aligned} k: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + x^4 \end{aligned}$$

On va étudier cette fonction, k est dérivable et $k'(x) = 1 + 4x^3$

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \left(-\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$$

$$k\left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\left(1 + \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^3\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

Le « x^4 » l'emporte sur le « x ».

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tout $y > -\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$, y admet deux antécédents, k est ni surjective ni injective.

Correction exercice 18 :

1.
Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$
Si $x_1 > x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$
Donc f est injective.
2. $K = f(I)$

Correction exercice 19 :

1.
$$f(1,2) = 1 \times 2 = 2 \times 1 = f(2,1)$$
Donc f n'est pas injective.
2. $f(1,p) = 1 \times p = p$
Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(n,m) = (1,p)$ tel que $p = f(n,m)$
f est surjective.
3.
$$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow (n_1, (n_1+1)^2) = (n_2, (n_2+1)^2) \Rightarrow \begin{cases} n_1 = n_2 \\ (n_1+1)^2 = (n_2+1)^2 \end{cases} \Rightarrow n_1 = n_2$$
Donc g est injective.
4. On va montrer que $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent. Supposons que
$$(1,1) = (n, (n+1)^2)$$
Alors
$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = (n+1)^2 \end{cases}$$
Ce qui équivaut à
$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = 2^2 \end{cases}$$
Ce qui est impossible donc $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent, g n'est pas surjective.

Correction exercice 20 :

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$$

f est injective.

1 n'a pas d'antécédent car il n'existe pas d'entier naturel n tel que $1 = 2n$, f n'est pas surjective.

$g(0) = E\left(\frac{0}{2}\right) = E(0) = 0$ et $g(1) = E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, donc $g(0) = g(1)$ ce qui entraine que g n'est pas injective.

Pour tout $y = n \in \mathbb{N}$ (dans l'ensemble d'arrivé) il existe $x = 2n \in \mathbb{N}$ (dans l'ensemble de départ) tel que :

$$g(x) = E\left(\frac{x}{2}\right) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n = y$$

g est surjective.

Si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$

$$f \circ g(n) = f\big(g(n)\big) = f\big(g(2p)\big) = f\left(E\left(\frac{2p}{2}\right)\right) = f\big(E(p)\big) = f(p) = 2p = n$$

Si n est impaire, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$

$$f \circ g(n) = f\big(g(n)\big) = f\big(g(2p+1)\big) = f\left(E\left(\frac{2p+1}{2}\right)\right) = f\left(E\left(p + \frac{1}{2}\right)\right) = f(p) = 2p = n - 1$$

$$f \circ g(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Que n soit paire ou impaire

$$g \circ f(n) = g\big(f(n)\big) = g(2n) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n$$

$$g \circ f = id$$

Remarque :

Comme on le voit sur cet exemple, il ne suffit pas que $g \circ f = id$ pour que g soit la bijection réciproque de f. La définition de la bijection réciproque d'une fonction $f_1 : E \to E$ est :

« S'il existe une fonction $f_2 : E \to E$ telle que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = id_E$ alors $f_2 = f_1^{-1}$ » on a alors : f_1 et f_2 sont deux fonctions bijectives.

Correction exercice 21 :

$f(E) \subset E$ donc $f\big(f(E)\big) \subset f(E) \subset E$, or $f\big(f(E)\big) = E$ donc $E \subset f(E) \subset E$, par conséquent $E = f(E)$ ce qui signifie que f est surjective.

Correction exercice 22 :

1. Supposons que g existe, $f \circ g = Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f\big(g(n)\big) = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \big(g(n)\big)^2 = n$

   Si n n'est pas un carré cela ne marche pas, par exemple si $n = 2$, $\big(g(2)\big)^2 = 2$ donc $g(2) = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$

   Il n'existe pas de fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$.
2. Supposons que h existe, $h \circ f = Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, h\big(f(n)\big) = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, h(n^2) = n$

   Les valeurs $h(p)$ prennent les valeurs qu'elles veulent sauf lorsque p est un carré auquel cas $h(p) = \sqrt{p}$, donnons une fonction h qui répond à la question :

   Si $p \neq n^2$ alors $h(p) = 0$ et si $p = n^2$ alors $h(p) = \sqrt{p} = n$.

Correction exercice 23 :

1. Si g existe alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f\big(g(n)\big) = n \Leftrightarrow 2g(n) = n$, si n est impair $g(n) \notin \mathbb{Z}$ donc il n'existe pas de fonction $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$.

2. Si h existe alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $h\big(f(n)\big) = n \Leftrightarrow h(2n) = n$

Soit h la fonction définie, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, par $h(2p) = p$ et $h(2p+1) = 0$ convient.

Correction exercice 24 :

On pose $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, et bien sur tous les e_j sont distincts ainsi que tous les f_i.

On rappelle que le fait que f soit une application entraine que $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$

On suppose que f est injective, on va montrer que f est surjective.

On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si f n'est pas surjective alors f n'est pas injective.

Soit $f_i \in F$ et on suppose qu'il n'existe pas de $e_j \in E$ tel que $f_i = f(e_j)$ (f n'est pas surjective)

Donc $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n\}$, il y a n éléments dans le premier ensemble et $n-1$ dans le second, donc il existe j_1 et j_2, avec $j_1 \neq j_2$ dans $\{1,2, \dots, n\}$ tels que $f\big(e_{j_1}\big) = f(e_{j_2})$, or $e_{j_1} \neq e_{j_2}$ donc f n'est pas injective.

On suppose que f est surjective et on va montrer que f est injective.

On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si f n'est pas injective alors f n'est pas surjective.

Si $f(e_i) = f\big(e_j\big) = u$ avec $e_i \neq e_j$ alors

$\big\{f(e_1), \dots, f(e_{i-1}), u, f(e_{i+1}), \dots, f\big(e_{j-1}\big), u, f(e_{j+1}) \dots, f(e_n)\big\} \subset \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, le premier ensemble a $n-1$ éléments et le second n donc il existe un f_j qui n'a pas d'antécédent, cela montre que f n'est pas surjective.

On a montré que $(i) \Leftrightarrow (ii)$, par définition $(iii) \Rightarrow (i)$ et $(iii) \Rightarrow (ii)$. Si on a (i) alors on a (ii) et (i) *et* (ii) entraine (iii) de même si on a (ii) alors on a (i) et (i) *et* (ii) entraine (iii). Ce qui achève de montrer les trois équivalences.

Correction exercice 25 :

1. u et v sont surjectives donc $u(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$ et $v(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$ par conséquent

$$u \circ v \circ u(\mathbb{N}) = u\Big(v\big(u(\mathbb{N})\big)\Big) = u\big(v(\mathbb{Z})\big) = u(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$$

Cela montre que $u \circ v \circ u$ est surjective.

$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow u\Big(v\big(u(x_1)\big)\Big) = u\Big(v\big(u(x_2)\big)\Big) \Leftrightarrow v\big(u(x_1)\big) = v\big(u(x_2)\big)$$

Car u est injective

$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow v\big(u(x_1)\big) = v\big(u(x_2)\big) \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2)$$

Car v est injective

$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Car u est injective

Finalement $u \circ v \circ u$ est injective et donc bijective (puisqu'elle est surjective).

2. 7 n'admet pas d'antécédent donc f n'est pas surjective.

$$f(a,b,c) = f(a',b',c') \Leftrightarrow 2^a 3^b 5^c = 2^{a'} 3^{b'} 5^{c'}$$

L'unicité de la décomposition des entiers en produit de facteur premier entraine que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$, autrement dit f est injective.

Donc f est injective et pas surjective.

3. $\varphi(n) = 0 \quad et\ \varphi(2n) = 0$

Donc φ n'est pas injective.

$$\varphi(\mathbb{Z}) = \{0,1,\dots,n-1\} \subsetneq \mathbb{N}$$

Donc φ n'est pas surjective.

4. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}$ on cherche s'il existe un unique couple $(u,v) \in \mathbb{Z}$ tel que

Premier cas $a \neq 0$

$$(x,y) = f(a,b) \Leftrightarrow (x,y) = (au+bv+1, cu+dv-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = au+bv+1 \\ y = cu+dv-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} x-1 = au+bv \\ y+1 = cu+dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ cL_1 - aL_2 \end{matrix}\begin{cases} x-1 = au+bv \\ c(x-1)-a(y+1) = cbv-adv \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = au+bv \\ c(x-1)-a(y+1) = (cb-ad)v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = au+bv \\ c(x-1)-a(y+1) = -v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = au+b\big(-c(x-1)+a(y+1)\big) \\ v = -c(x-1)+a(y+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} au = -b\big(-c(x-1)+a(y+1)\big)+(x-1) \\ v = -c(x-1)+a(y+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} au = bc(x-1)-ab(y+1)+(x-1) \\ v = -c(x-1)+a(y+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} au = (bc+1)(x-1)-ab(y+1) \\ v = -c(x-1)+a(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} au = ad(x-1)-ab(y+1) \\ v = -c(x-1)+a(y+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = d(x-1)-b(y+1) \\ v = -c(x-1)+a(y+1) \end{cases}$$

Si $a = 0$, alors $bc = -1$, en particulier $b \neq 0$ et $\frac{1}{b} = -c$

$$(x,y) = f(0,b) \Leftrightarrow (x,y) = (bv+1, cu+dv-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = bv+1 \\ y = cu+dv-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{x-1}{b} \\ y = cu+dv-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ y = cu-dc(x-1)-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ y = cu-dc(x-1)-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ cu = dc(x-1)+1+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ u = d(x-1)+\dfrac{1+y}{c} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ u = d(x-1)-b(1+y) \end{cases}$$

Ce sont les mêmes formules que dans le cas où $a \neq 0$

Donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ il existe un unique couple

$$(u,v) = \big(d(x-1)-b(y+1), -c(x-1)+a(y+1)\big) \in \mathbb{Z}^2$$

tel que $(x,y) = f(u,v)$, f est bijective et

$$f^{-1}(x,y) = \big(d(x-1)-b(y+1), -c(x-1)+a(y+1)\big)$$

Correction exercice 26 :

1.

$$q_1 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$q_2 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{q_2} < 0 \quad (2)$$

En additionnant (1) et (2)

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$$

2.

a. Pour tout $(p_1,q_1) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $(p_2,q_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$

$$f(p_1,q_1)=f(p_2,q_2)\Rightarrow p_1+\frac{1}{q_1}=p_2+\frac{1}{q_2}\Rightarrow\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}=p_2-p_1$$

D'après la première question cela montre que $p_2-p_1\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ or $p_2-p_1\in\mathbb{Z}$ donc $p_2-p_1=0$, autrement dit $p_1=p_2$, puis en reportant dans

$$p_1+\frac{1}{q_1}=p_2+\frac{1}{q_2}$$

Cela montre que $\frac{1}{q_1}=\frac{1}{q_2}$ et que $q_1=q_2$

Finalement

$$(p_1,q_1)=(p_2,q_2)$$

Ce qui montre que f est injective.

b. Regardons si $1\in\mathbb{Q}$ admet un antécédent, on suppose qu'il existe, on l'appelle (p,q)

$$p+\frac{1}{q}=1$$

Ce qui équivaut à

$$\frac{1}{q}=1-p$$

Mais $\frac{1}{q}\notin\mathbb{Z}$ et $1-p\in\mathbb{Z}$, ce qui est impossible. Par conséquent f n'est pas surjective.

Correction exercice 27 :

Supposons qu'il existe $f:E\to\mathcal{P}(E)$ surjective et on cherche s'il existe un antécédent à A. On appelle $x_0\in E$, un antécédent de A, donc par définition $f(x_0)=A$,

si $x_0\in f(x_0)$ alors $x_0\in A$ et donc $x_0\notin f(x_0)$ ce qui est contradictoire

Si $x_0\notin f(x_0)$ alors par définition de A, $x_0\in A=f(x_0)$ ce qui est aussi contradictoire.

L'hypothèse est donc fausse, il n'y a pas d'application surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Correction exercice 28 :

1. Première méthode : raisonnons par récurrence

On pose (H_n) il y a $n(n-1)$ applications injectives de I_2 dans I_n.

Regardons si (H_2) est vraie.

Il y a 4 applications de I_2 dans I_n.

$$f_1(1)=1\ \text{ et } f_1(2)=1$$
$$f_2(1)=1\ \text{ et } f_2(2)=2$$
$$f_3(1)=2\ \text{ et } f_3(2)=1$$
$$f_4(1)=2\ \text{ et } f_4(2)=2$$

Seules f_2 et f_3 sont injectives. Il y a $2=2(2-1)$ applications injectives de I_2 dans I_2.

Montrons que $(H_n)\Rightarrow(H_{n+1})$

Il y a $n(n-1)$ applications injectives de $\{0,1\}$ dans $\{0,1,\dots,n\}$.

Supposons que $f(1)=n+1$ alors $f(2)\in\{1,\dots,n\}$ (pour que $f(1)\neq f(2)$), cela fait n applications injectives de plus.

Supposons que $f(2)=n+1$ alors $f(1)\in\{1,\dots,n\}$ (pour que $f(1)\neq f(2)$), cela fait n applications injectives de plus.

Au total, il y a $n(n-1)+n+n=n^2-n+n+n=n^2+n=n(n+1)$

L'hypothèse est vérifiée.

Conclusion pour tout $n \geq 2$, il y a $n(n-1)$ applications injectives de I_2 dans I_n.
Deuxième méthode :
Si $f(1) = k \in \{0,1,\dots,n\}$ alors $f(2) \in \{1,\dots,k-1,k+1,\dots,n\}$.
Cela fait n choix possibles pour $f(1)$ et $n-1$ pour $f(2)$, soit $n(n-1)$ choix possibles pour $\big(f(1),f(2)\big)$ de façon à ce que $f(1) \neq f(2)$ (autrement dit pour que f soit injective).

2. $f: I_m \to I_n$
f injective équivaut à $f(1) = k_1; f(2) = k_2; \dots; f(m) = k_m$, avec $k_1, k_2, \dots, k_m \in \{1,2,\dots,n\}$ tous distincts par conséquent $m \leq n$.
Remarque :
Cela ne veut pas dire que toutes les applications de $\{1,2,\dots,m\}$ dans $\{1,2,\dots,n\}$ sont injectives !
Supposons que f est surjective.
Pour tout $k_1, k_2, \dots, k_n \in \{1,2,\dots,n\}$ (les k_i tous distincts) il existe $l_1, l_2, \dots, l_n \in \{1,2,\dots,m\}$ tels que $k_i = f(l_i)$ par définition d'une application tous les l_i sont distincts (sinon un élément aurait plusieurs images), par conséquent $n \leq m$.
Pour que f soit bijective il faut (et il suffit) que f soit injective et sujective, par conséquent il faut que $m \leq n$ et que $n \leq m$, autrement dit il faut que $m = n$.
Remarque :
Cela ne veut pas dire que toutes les applications de $\{1,2,\dots,n\}$ dans $\{1,2,\dots,n\}$ sont bijectives.

Correction exercice 29 :

1. $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
Car g est injective
$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
Car f est injective.
Donc $g \circ f$ est injective.
2. Première méthode :
Pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective.
Comme pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective. On en déduit que pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ autrement dit $g \circ f$ est surjective.

Remarque :
(a) D'habitude on appelle y un élément de l'image G mais ici ce pose un petit problème de notation parce que l'on va appeler x l'élément de F et on ne saura pas trop comment appeler l'élément de E, c'est pour cela qu'il est plus malin de l'appeler z.
(b) Si on commence par écrire « pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective » puis « pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective » donc « pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ » cela ne va pas, je vous laisse réfléchir pourquoi.

Deuxième méthode :
On rappelle que $\varphi: U \to V$ est surjective si et seulement si $\varphi(U) = V$
Donc $f(E) = F$ et $g(F) = G$, par conséquent $g \circ f(E) = g\big(f(E)\big) = g(F) = G$ et on en déduit que $g \circ f$ est surjective.

3. Si g et f sont bijectives alors elles sont injectives et $g \circ f$ est injective et si g et f sont bijectives alors elles sont surjectives et $g \circ f$ est surjective, on en déduit que $g \circ f$ est bijective.
4. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Car $g \circ f$ est injective, par conséquent f est injective.
5. Première méthode :

Pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$, donc il existe $y = f(x)$ tel que $z = g(y)$ ce qui signifie que g est surjective.

Deuxième méthode :

Comme $g \circ f$ est surjective, $g \circ f(E) = G \Leftrightarrow g\big(f(E)\big) = G$ or $f(E) \subset F$ donc

$$g\big(f(E)\big) \subset g(F)$$

Comme $g(F) \subset G$, cela donne

$$G = g\big(f(E)\big) \subset g(F) \subset G$$

D'où

$$g\big(f(E)\big) = g(F) = G \Rightarrow g(F) = G$$

Ce qui montre que g est surjective.

6.

a. $g \circ f = Id_E$ est bijective (l'identité est bijective)

$g \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective.

$g \circ f$ est surjective, d'après 5°), g est surjective.

Remarque :

$g \circ f = Id_E$ n'entraine pas que $g = f^{-1}$ et que donc f et g sont bijectives.

b. $f \circ g = Id_F$ est bijective (l'identité est bijective)

$f \circ g$ est injective, d'après 4°), g est injective.

$f \circ g$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.

c. $f \circ f = Id_E$ est bijective

$f \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective.

$f \circ f$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.

Par conséquent f est bijective et $f^{-1} = f$.

Correction exercice 30 :

1. Pour tout $y \in Y$ il existe $x = s(y) \in X$ tel que $y = Id_Y(y) = f\big(s(y)\big) = f(x)$, f est surjective.
2. $s(y_1) = s(y_2) \Rightarrow f\big(s(y_1)\big) = f\big(s(y_2)\big) \Rightarrow y_1 = y_2$

   s est injective.
3. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow r\big(f(x_1)\big) = r\big(f(x_2)\big) \Rightarrow Id_X(x_1) = Id_X(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

   f est injective.
4. Pour tout $x \in X$, pose $y = f(x)$.

   Comme $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ à chaque $y \in Y$ telle que $y = f(x)$ on associe bien une unique valeur x, on définit alors $r: f(X) \to X$ par $r(y) = x$. Pour les $y \in Y$ qui ne sont pas dans l'image de X par f, autrement dit qui ne sont pas de la forme $y = f(x)$, on leur attribue n'importe quelle valeur dans X, mettons x_0 pour fixé les idées (d'ailleurs, on n'est pas obligé de leur attribuer à tous la même valeur).

   Pour tout $x \in X$.

   $$x = r(y) = r\big(f(x)\big) \Leftrightarrow Id_X = r \circ f$$

   r est bien une rétraction de f.

Remarque :

Si $y \notin f(X)$, $r(y) = x_0$ ne sert à rien pour montrer que r est une rétraction.

5. Pour tout $x \in X$, il existe $y = f(x)$ tel que :

   $$x = Id_X(x) = r\big(f(x)\big) = r(y)$$

   Cela montre que r est surjective.

Remarque :

Les rôles habituels de x et y ont été inversés pour respecter les notations de l'énoncé.

6.

Si f admet une section alors f est surjective d'après 1°).
Si f admet une rétraction alors f est injective d'après 3°).
Par conséquent f est bijective, on note $f^{-1}: Y \to X$ sa bijection réciproque.
Comme $Id_X = r \circ f$, en composant par f^{-1} à droite :

$$Id_X \circ f^{-1} = (r \circ f) \circ f^{-1} \Leftrightarrow f^{-1} = r \circ (f \circ f^{-1}) = r$$

Comme $Id_Y = f \circ s$, en composant par f^{-1} à gauche :

$$f^{-1} \circ Id_Y = f^{-1} \circ (f \circ s) \Leftrightarrow f^{-1} = (f^{-1} \circ f) \circ s = s$$

D'où $r = s = f^{-1}$.

Correction exercice 31 :

1. Pour tout $y \in f(A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
   Comme $x \in A$, $y = f(x) \in f(A)$, comme $x \in B$, $y = f(x) \in f(B)$ par conséquent
   $$y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$$
   Cela montre que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$
   Pour tout $y \in f(A) \cup f(B)$, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$
   Si $y \in f(A)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, mais $x \in A \subset A \cup B$ donc $y = f(x) \in f(A \cup B)$
   Si $y \in f(B)$ alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$, mais $x \in B \subset A \cup B$ donc $y = f(x) \in f(A \cup B)$
   Cela montre que s tous les cas $y \in f(A \cup B)$ et que donc
   $$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$
   Finalement $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. Pour tout $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.
   Comme $x \in A \cap B \subset A$, $y = f(x) \in f(A)$, comme $x \in A \cap B \subset B$, $y = f(x) \in f(B)$ par conséquent
   $$y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$$
   Cela montre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
   Pour trouver un exemple où l'inclusion est stricte, d'après la suite, il ne faut pas prendre une fonction injective, par exemple prenons $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, ensuite il faut prendre A et B où f n'est pas injective, par exemple :
   $$A = [-4,2] \quad \text{et } B = [-2,3]$$
   $$f(A) = f([-4,2]) = [0,16] \; ; \quad f(B) = f([-2,3]) = [0,9] \Rightarrow f(A) \cap f(B) = [0,9]$$
   $$A \cap B = [-2,2] \Rightarrow f(A \cap B) = [0,4]$$
   On a bien $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$

Correction exercice 32 :

1. $f^{-1}(\{2\}) = \{3,4\}; f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,3,4\} \; ; f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$
2.
   $$f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$$
   $$f^{-1}([1,2]) = \left[-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right]$$

Correction exercice 33 :

1. $[0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$
   Donc

$$f([0,1]\times[0,1])=\{x\in\mathbb{R},0\leq x\leq 1\}=[0,1]$$

$$f^{-1}([-1,1])=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,f(x,y)\in[-1,1]\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,x\in[-1,1]\}=[-1,1]\times\mathbb{R}$$

2.

$$f(\mathbb{N})=\{y\in[-1,1],y=\cos(\pi n),n\in\mathbb{N}\}=\{y\in[-1,1],y=(-1)^{\mathrm{n}},n\in\mathbb{N}\}=\{-1,1\}$$

$$f(2\mathbb{N})=\{y\in[-1,1],y=\cos(2\pi n),n\in\mathbb{N}\}=\{y\in[-1,1],y=1,n\in\mathbb{N}\}=\{1\}$$

$$f^{-1}(\{\pm1\})=\{x\in\mathbb{R},\cos(\pi x)=\pm1\}$$

Or $\cos(x)=1\Leftrightarrow x=2k\pi$ et $\cos(x)=-1\Leftrightarrow x=(2k+1)\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$$f^{-1}(\{\pm1\})=\{x\in\mathbb{R},x=2k\pi\ ,x=(2k+1)\pi\ ,\mathrm{k}\in\mathbb{Z}\}=\{n\pi,n\in\mathbb{Z}\}$$

Correction exercice 34 :

1. Pour tout $x\in f^{-1}(A'\cup B')$, $f(x)\in A'\cup B'$ donc $f(x)\in A'$ ou $f(x)\in B'$, par conséquent $x\in f^{-1}(A')$ ou $x\in f^{-1}(B')$, autrement dit $x\in f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$
   On a montré que $f^{-1}(A'\cup B')\subset f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$
   Pour tout $x\in f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$, $x\in f^{-1}(A')$ ou $x\in f^{-1}(B')$, par conséquent $f(x)\in A'$ ou $f(x)\in B'$, autrement dit $f(x)\in A'\cup B'$, donc $x\in f^{-1}(A'\cup B')$.
   On a montré que $f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')\subset f^{-1}(A'\cup B')$
   Finalement $f^{-1}(A'\cup B')=f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$
2. Pour tout $x\in f^{-1}(A'\cap B')$, $f(x)\in A'\cap B'$ donc $f(x)\in A'$ et $f(x)\in B'$, par conséquent $x\in f^{-1}(A')$ et $x\in f^{-1}(B')$, autrement dit $x\in f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')$
   On a montré que $f^{-1}(A'\cap B')\subset f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')$
   Pour tout $x\in f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')$, $x\in f^{-1}(A')$ et $x\in f^{-1}(B')$, par conséquent $f(x)\in A'$ et $f(x)\in B'$, autrement dit $f(x)\in A'\cap B'$, donc $x\in f^{-1}(A'\cap B')$.
   On a montré que $f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')\subset f^{-1}(A'\cap B')$
   Finalement $f^{-1}(A'\cap B')=f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')$

Correction exercice 35 :

1. Pour tout $x\in A$, $f(x)\in f(A)$ et donc $x\in f^{-1}\big(f(A)\big)$, ce qui montre que $A\subset f^{-1}\big(f(A)\big)$
2. Pour tout $y\in f\big(f^{-1}(B)\big)$, il existe $x\in f^{-1}(B)$ tel que $y=f(x)$, comme $x\in f^{-1}(B)$ $f(x)\in B$ ce qui entraine que $y\in B$, ce qui montre que $f\big(f^{-1}(B)\big)\subset B$.
3. Comme « pour toute partie A de E, on a $A\subset f^{-1}\big(f(A)\big)$ » la question revient à montrer que : « f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A\supset f^{-1}\big(f(A)\big)$ »
   Si f est injective.
   Pour tout $x\in f^{-1}\big(f(A)\big)$, $f(x)\in f(A)$ ce qui signifie qu'il existe $x'\in A$ (attention, à priori ce n'est pas le même x que celui du début de la phrase) tel que $f(x)=f(x')$ comme f est injective $x=x'$, par conséquent $x\in A$.
   On a montré que $f^{-1}\big(f(A)\big)\subset A$.
   Si pour toute partie $A\subset E$, $f^{-1}\big(f(A)\big)\subset A$

$$f(x_1)=f(x_2)=y$$

   On prend $A=\{x_1\}$

$$f(A)=f(\{x_1\})=\{f(x_1)\}=\{y\}\Rightarrow f^{-1}\big(f(A)\big)=f^{-1}(\{y\})=f^{-1}(y)$$

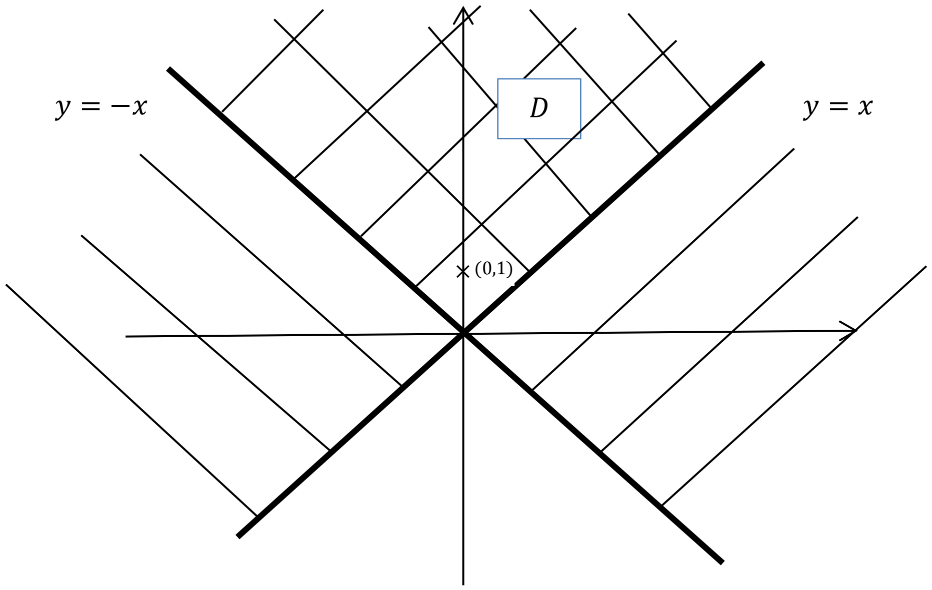
   D'après l'hypothèse $f^{-1}\big(f(A)\big)\subset A$ donc $\{f^{-1}(y)\}\subset\{x_1\}$
   Or $x_2\in f^{-1}(y)$ car $f(x_2)=y$ donc $x_2\in\{x_1\}$ par conséquent $x_1=x_2$ ce qui signifie que f est injective.

Finalement on a montré l'équivalence demandée.

4. Comme « pour toute partie B de F, on a $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ » la question revient à montrer que : « f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f\left(f^{-1}(B)\right) \supset B$ »
Si f est surjective.
Pour tout $y \in B$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective.
$x \in f^{-1}(B)$ entraine que $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$, cela montre que $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$.
Si pour tout $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$
On pose $B = \{y\}$, alors $\{y\} \subset f\left(f^{-1}(\{y\})\right)$ ce qui s'écrit aussi $y \in f\left(f^{-1}(\{y\})\right)$, il existe donc $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $y = f(x)$, cela montre bien que f est surjective.
Finalement on a montré l'équivalence demandée.

Correction exercice 36 :

1. Le point $(0,1)$ vérifie $x \leq y$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$ est le demi-plan supérieur droit. De même $(0,1)$ vérifie $-y \leq x$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x\}$ est le demi-plan supérieur droit, D est l'intersection de ces deux demi-plan, D est le quart de plan supérieur du schéma ci-dessous.



2. a.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

En additionnant L_1 et L_2 on trouve que $2x_1 = 2x_2$, donc $x_1 = x_2$, puis en remplaçant dans L_1, on trouve que $y_1 = y_2$.
b.

$$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow (x_1^2 + y_1^2, 2x_1y_1) = (x_2^2 + y_2^2, 2x_2y_2) \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \\ 2x_1y_1 = 2x_2y_2 \end{cases}$$

$L_1 - L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2$, comme $x - y \leq 0$ sur D, cela donne $-(x_1 - y_1) = -(x_2 - y_2)$ ou encore $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$.
$L_1 + L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$, comme $x + y \geq 0$ sur D, cela donne $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.
D'après 2.a. cela donne que $x_1 = x_2$ et que $y_1 = y_2$, ce qui montre que f est injective.

3. $(-1, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent dans D car $x^2 + y^2 > 0$.