Ensembles Applications : Exercices

Exercice 1

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Montrer :

1) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.
2) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
3) $\begin{cases} A \cap B \subset A \cap C \\ A \cup B \subset A \cup C \end{cases} \Longrightarrow B \subset C$.
4) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
5) $(A - C) - (B - C) = (A - B) - C = A - (B \cup C)$
6) $\bar{A} \triangle \bar{B} = A \triangle B$

Exercice 2

Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathfrak{R}$ par : $z\mathfrak{R}z' \Longleftrightarrow |z| = |z'|$

1) Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Déterminer la classe d'équivalence de chaque z de $\mathbb{C}$.

Exercice 3

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathfrak{R}$ par : $x\mathfrak{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

1) Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'equivalence.
2) Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$. Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Exercice 4

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $P(E)$- $\emptyset$ la relation $\lhd$ par :$X \lhd Y \Longleftrightarrow (X = Y$ ou $\forall x \in X$, $\forall y \in Y \ x \leqslant y)$.

Vérifier que $\lhd$ est une relation d'ordre.

Exercice 5

Soient E,F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications ; on considère l'application $h : E \longrightarrow F \times G$ définie par : $\forall x \in E : h(x) = (f(x), g(x))$.

1) Montrer que si f et g sont injectives, alors h l'est aussi.
2) On suppose que f et g sont surjectives, h est-elle nécessairement surjective ?

Exercice 6

Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que : $f = fofof$.

Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 7

Soient E un ensemble et $p : E \longrightarrow E$ une application telle que : $p = pop$.

Montrer que si p est injective ou surjective, alors $p = Id_E$.

Exercice 8

Soient E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications telles que : $gofogof$ est surjective et $fogofog$ est injective.

Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 9

Soit X un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de X sur l'ensemble de ses parties $P(X)$.
• On pourra raisonner par l'absurde et considérer pour $f : X \longrightarrow P(X)$ l'ensemble $A = x \in X/x \notin f(x)$

Exercice 10

Soient X, Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application.
1) Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $g : Z \longrightarrow X$ et tout $h : Z \longrightarrow X$, on a $fog = foh \Longrightarrow g = h$.
2) Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $g : Y \longrightarrow Z$ et tout $h : Y \longrightarrow Z$, on a $gof = hof \Longrightarrow g = h$.

Correction

Exercice 1

1) $(A-C)\cap(B-C)=(A\cap\bar{C})\cap(B\cap\bar{C})=(A\cap B)\cap\bar{C}=(A\cap B)-C$.

2) Comme 1)

3) $B=(A\cup B)\cap B\subset(A\cup C)\cap B=(A\cap B)\cup(C\cap B)\subset(A\cap C)\cup(C\cap B)=(A\cup B)\cap C\subset C$

4) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(B\cup(A\cap C))\cap(C\cup A)=(B\cap(C\cup A))\cup(A\cap C)=(B\cap C)\cup(B\cap A)\cup(A\cap C)$

5) $(A-C)-(B-C)=(A\cap\bar{C})\cap(\overline{B\cap\bar{C}})=(A\cap\bar{C})\cap(\bar{B}\cup C)=(A\cap\bar{C}\cap\bar{B})\cup(A\cap\bar{C}\cap C)=(A\cap\bar{B})\cap\bar{C}=(A-B)-C$

Et : $(A-B)-C=A\cap(\bar{B}\cap\bar{C})=A\cap(\overline{B\cup C})=A-(B\cup C)$

6) $\bar{A}\bigtriangleup\bar{B}=(\bar{A}\cap\bar{\bar{B}})\cup(\bar{B}\cap\bar{\bar{A}})=(\bar{A}\cap B)\cup(\bar{B}\cap A)=A\bigtriangleup B$

Exercice 2

1) Soient z , $z^{'}$, $z^{''}$ des complexes quelconques.

- Reflexivité : $z\mathfrak{R}z$ car $|z|=|z|$.
- Symétrie : $z\mathfrak{R}z^{'}=z^{'}\mathfrak{R}z$ car $|z|=|z^{'}|$ et donc $|z^{'}|=|z|$.
- Transitivité : $z\mathfrak{R}z^{'}$ et $z^{'}\mathfrak{R}z^{''}$ alors $|z|=|z^{'}|=|z^{''}|$ donc $z\mathfrak{R}z^{''}$.

Donc $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.

2) La classe d'équivalence d'un point $z\in\mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes qui sont en relation avec z, c'est-à-dire l'ensemble des complexes dont le module est égal à $|z|$. Géométriquement la classe d'équivalence de z est le cerlce $\mathfrak{C}$ de centre 0 et de rayon $|z|$:$\mathfrak{C}=|z|e^{i\theta}/\theta\in\mathbb{R}$

Exercice 3

1) Evident, il suffit de remarquer que $x\mathfrak{R}y\iff x^2-x=y^2-y$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$. On cherche les éléments y de $\mathbb{R}$ tels que $x\mathfrak{R}y$. On doit donc résoudre l'équation $x^2-y^2=x-y$. Elle se factorise en $(x-y)(x+y)-(x-y)=0\iff(x-y)(x+y-1)=0$.
La classe de x est donc égale à $x,1-x$. Elle est constituée de deux éléments, sauf si $x=1-x\iff x=\frac{1}{2}$. Dans ce cas, elle est égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 4

- Reflexivité : pour tout $X\in P(E)$ on a : $X\lhd X$ car $X=X$.
- Antisymétrie : pour $X,Y\in P(E)$ tels que $X\lhd Y$ et $Y\lhd X$, alors par définition de $\lhd$ on a :$\forall x\in X\ \forall y\in Y$: $x\leqslant y$ et $y\leqslant x$.

Comme la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre alors : $x\leqslant y$ et $y\leqslant x\Longrightarrow x=y$.
Donc $\forall x\in X\ \forall y\in Y$: $x=y$; ce qui implique que $X=Y$ (dans ce cas en fait X est vide ou un singleton).

- Transitivité : soit $X,Y,Z\in P(E)$ tels que $X\lhd Y$ et $Y\lhd Z$. Si $X=Y$ ou $Y=Z$, alors il est clair que $X\lhd Z$.

Supposons que X et $Y\neq Z$ alors :
$\forall x\in X\ \forall y\in Y\ \forall z\in Z\ x\leqslant y$ et $y\leqslant z$.
alors par transitivité de la relation $\leqslant$ on obtient : $\forall x\in X\ \forall z\in Z$: $x\leqslant z$
Donc $X\lhd Z$.
Conclusion : $\lhd$ est une relation d'ordre.

Exercice 5

1) Soient $x,y\in E$.

$$h(x)=h(y)\iff\left\{\begin{array}{l}f(x)=f(y)\\g(x)=g(y)\end{array}\right.\Longrightarrow x=y \text{ dès que } f \text{ ou } g \text{ est injective.}$$

2) Contre exemple : Soit E un ensemble contenant 2 éléments a et b : $E=a,b$ et considérant $F=G=E$ et $f=g=Id_E$ surjectives (évident).
On aura alors $\forall x\in E$: $h(x)=(Id_E(x),Id_E(x))=(x,x)$.

On a : $(a,b) \in E \times E$, mais il n'existe pas d'élément x de E qui vérifie : $h(x) = (a,b)$
Donc h n'est pas nécessairement surjective.

Exercice 6

Si f est injective :
comme $\forall x \in E : f(fof)(x)) = f(x)$; $f \circ f = Id_E$, donc f est bijective.
Si f est surjective : pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et $f \circ f(x) = f \circ f \circ f(y) = f(y) = x$.
Donc $f \circ f = Id_E$; donc f est bijective.

Exercice 7

Si p est injective. Comme $\forall x \in E$, $p(p(x)) = p(x)$. On déduit que $p = Id_E$.
Si p est surjective, pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ et $p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$, d'où $p = Id_E$

Exercice 8

On a $g \circ (f \circ g \circ f)$ est surjective et $(f \circ g \circ f) \circ g$ est injective, donc g est bijective.
d'autre part : $f \circ g \circ f = g^{-1} \circ (g \circ f \circ g \circ f) = (f \circ g \circ f \circ g) \circ g^{-1}$ est donc surjective et injective, donc bijective.
En conclusion, $f \circ g \circ f$ est bijective et g bijective, donc f est bijective.

Exercice 9

Utilisons l'indication, Si f était surjective, nous pourrions trouver $a \in X$ tel que $A = f(a)$.
Supposons d'abord $a \in A$; on obtient $a \in f(a)$ et par conséquent $a \notin A$, ce qui contredit notre hypothèse.
Supposons maintenant que $a \notin A$; on obtient $a \notin f(a)$ et par conséquent $a \in A$, ce qui contredit notre hypothèse.
Par conséquent, l'élément a n'appartient ni à A, ni à son complémentaire, ce qui est impossible.
Par suite, A ne possède pas d'antécédent par f, qui est donc non surjective.

• Remarque : Ce sujet entre dans le cadre du "*paradoxe de Russell*" (Paradoxe du menteur).

Exercice 10

1)
• Supposons d'abord f injective et soient $g : Z \longrightarrow X$ et $h : Z \longrightarrow X$ telles que $f \circ g = g \circ h$.
Alors, pour tout z de Z, on a $f(g(z)) = f(h(z)) \Longrightarrow g(z) = h(z)$ puisque f est injective.
On a donc bien $g = h$.
• Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que f n'est pas injective.
Soit $x \neq y$ tel que $f(x) = f(y)$. Posons $Z =0$, $g(0) = x$ et $h(0) = y$.
Alors on a $f \circ g(0) = f \circ h(0)(= f(x) = f(y))$; alors que $g \neq h$.

2)
• Supposons d'abord f surjective et soient $g : Y \longrightarrow Z$ et $h : Y \longrightarrow Z$ telles que $gof = hof$.
Soit $y \in Y$. Il existe x de X tel que $y = f(x)$. On en déduit $g(y) = gof(x) = hof(x) = h(y)$, ce qui prouve $g = h$.
• Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que f n'est pas surjective.
Il existe donc un point y_0 de Y qui n'est pas dans $f(X)$.
On considère alors $Z =0, 1$, g défini sur Y par $g(y_0) = 1$ et $g(y) = 0$ sinon, h défini sur Y par $h(y) = 0$ pour tout y.
Alors on a bien $g \circ f = h \circ f$ (car $f(x) \neq y_0$ pour tout x de X) et $h \neq g$.