

## Les applications

### Exercice 1

Soit l'application  $f$  définie de  $] -2, 2[$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{4-x^2}}$

- $f$  est-elle injective ? surjective ?
- soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $I = ] -2, 0]$ 
  - montrer que  $g$  est injective
  - montrer que  $g$  est une bijection de  $I$  vers  $\mathbb{R}^+$  et définir sa réciproque  $g^{-1}$

### Exercice 2

On considère l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$

- montrer que  $f$  est injective
- montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) : |f(x)| < 1$   $f$  est-elle surjective de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  ?
- montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $] -1, 1[$  puis définir sa réciproque  $f^{-1}$

### Exercice 3

Soit l'application  $f$  définie sur  $] -\infty, -1]$  par :  $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$

- montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty, -1]$
  - déduire que  $f$  est injective
- $f$  est-elle surjective de  $] -\infty, -1]$  vers  $\mathbb{R}$  ?
- montrer que  $f$  est une bijection de  $] -\infty, -1]$  vers  $] -\infty, 0]$  et déterminer sa réciproque

### Exercice 4

Soit l'application  $f$  définie de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$

- montrer que  $f$  est injective
- montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) : 0 \leq f(x) < \frac{1}{2}$   $f$  est-elle surjective ?
- montrer que  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\left[0, \frac{1}{2}\right[$  puis définir sa réciproque

### Exercice 5

Soit  $f$  l'application définie de  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

- montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \sqrt{x^2+1} > x$
- montrer que  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) f(x) - f(y) = (x - y) \left( \frac{x + y}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} - 1 \right)$
  - en déduire que  $f$  est injective
- $f$  est-elle surjective de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  ?
- montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}^{+*}$  et déterminer sa bijection réciproque

### Exercice 6

Soit  $f$  l'application définie de  $]0, +\infty[$  vers  $[2, +\infty[$  par :  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

- montrer que  $(\forall x > 0) f(x) > 2$
  - En déduire que  $f$  est surjective
  - $f$  est-elle injective ?
- Déduire que  $f$  est bijective puis déterminer sa réciproque

## Les applications

3) On considère l'application  $g$  définie de  $] -3, +\infty[$  vers  $[2, +\infty[$  par  $g(x) = \frac{x^2 + 6x + 10}{x + 3}$

a) Montrer que  $(\forall x > -3) \quad g(x) = f(x + 3)$

b) Dédurre que  $g$  est une bijection en déterminant sa réciproque

### Exercice 7

On considère l'application  $f$  définie de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  par :  $f((x, y)) = (x^2 - y^2, xy)$

1) soit  $(a, b)$  un élément de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

a) Montrer que l'équation  $x^2 - ax - b^2 = 0$  admet deux solutions distincts  $\beta ; \alpha$

b) montrer que  $\beta ; \alpha$  ont des signes opposés

2)  $f$  est-elle injective ? surjective ? justifier votre réponse

### Exercice 8

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ .  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$

1) Montrer que :  $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$

2) Montrer que :  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

3) a) montrer que :  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

b) Donner une application  $f$  telle que :  $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

c) montrer que si  $f$  est injective alors  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

### Exercice 9

$E$  un ensemble non vide,  $A$  une partie de  $E$ .

Soit  $f$  l'application définie de  $P(E)$  vers  $P(A) \times P(\bar{A})$  par  $f(X) = (A \cap X, X \cap \bar{A})$

☺ soit  $(X, Y)$  un élément de  $P(A) \times P(\bar{A})$  déterminer  $f(X \cup Y)$

☺ montrer que  $f$  est une bijection

☺ on considère l'application  $g$  définie de  $P(A) \times P(\bar{A})$  vers  $P(A) \times P(\bar{A})$  par :

$$g(X, Y) = (A - X, \bar{A} - Y)$$

Montrer que  $f(X) = g \circ f(\bar{X})$  en déduire que  $g$  est surjective

### Exercice 10

Soit  $f$  l'application définie de  $I = \mathbb{R} - \{0, 1\}$  vers  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$(\alpha) \quad (\forall x \in I) \quad f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x + 1$$

1) on pose  $g(x) = \frac{x-1}{x}$  pour tout  $x$  de  $I$

a) Vérifier que  $(\forall x \in I) \quad g(x) \in I$  et calculer  $(g \circ g)(x)$

b) déterminer  $(g \circ g \circ g)(x)$

2) a) montrer que  $(\forall x \in I) \quad f(x) + f((g \circ g)(x)) = \frac{-1}{x-1} + 1$

b) calculer  $f(g(x)) + f((g \circ g)(x))$  en fonction de  $x$

c) en déduire les applications  $f$  qui vérifient la relation  $(\alpha)$