

## Barycentre

**Exercice 1.**  $ABC$  est un triangle avec  $E$  le milieu de  $[AB]$ ,  $F$  le point tel que  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ , et  $G$  le point vérifiant  $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ .

1. Faire une figure
2. Démontrer que les droites  $(CE)$ ,  $(BF)$  et  $(AG)$  sont concourantes.

**Exercice 2.**  $ABC$  est un triangle tel que  $AB = 6$ ,  $AC = 4$  et  $BC = 5$ .  $G$  est le centre de gravité de  $ABC$ .

Déterminer et construire  $(\zeta)$  l'ensemble des points  $M$  dans chaque cas :

1.  $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6$
2.  $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$
3.  $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$ .

**Exercice 3.** Soient  $ABC$  un triangle et  $F$  le barycentre de  $\{(A, 1), (B, 2), (C, 1)\}$ . Soient  $D$  le milieu de  $[AC]$  et  $G$  le barycentre de  $\{(A, 5), (B, 2), (C, -3)\}$ .

1. Montrer que  $F$  est le milieu de  $[BD]$ .
2. Montrer que le quadrilatère  $ACFG$  est un parallélogramme.
3.  $E$  est le milieu de  $[AB]$ . Montrer que  $E, F$  et  $G$  sont alignés.
4. Vérifier que  $EF = \frac{1}{4}AC$ .

**Exercice 4.**  $ABCD$  un parallélogramme,  $E$  et  $F$  deux points tels que  $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AB}$  et  $(1-k)\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AD}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

1. Vérifier que  $C$  est un barycentre des points  $A, B$  et  $D$  en déterminant ses pondérations.
2. Montrer que  $C, E$  et  $F$  sont alignés.
3. Déterminer  $k$  pour que  $C$  soit le centre de  $[EF]$ .

**Exercice 5.**  $ABC$  un triangle. Soit  $E$  le barycentre de  $(B, 1)$  et  $(C, -3)$  et soit  $F$  le barycentre de  $(A, 2)$  et  $(B, 1)$

1. Faire une figure.
2. Montrer que  $(CF) \parallel (AE)$ .

**Exercice 6.** On considère un triangle  $ABC$  du plan.

1. (a) Déterminer et construire le point  $G$ , barycentre de  $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$   
(b) Déterminer et construire le point  $G'$ , barycentre de  $\{(A, 1), (B, 5), (C, -2)\}$
2. (a) Soit  $J$  le milieu de  $[AB]$ . Exprimer  $\overrightarrow{GG'}$  et  $\overrightarrow{JG'}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  et en déduire l'intersection des droites  $(GG')$  et  $(AB)$ .  
(b) Montrer que le barycentre  $I$  de  $\{(B, 2), (C, -1)\}$  appartient à  $(GG')$ .
3. Soit  $D$  un point quelconque du plan. Soient  $O$  le milieu de  $[CD]$  et  $K$  le milieu de  $[OA]$ .

- (a) Déterminer trois réels  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tels que  $K$  soit barycentre de  $\{(A, \alpha), (D, \beta), (C, \gamma)\}$
- (b) Soit  $X$  le point d'intersection de  $(DK)$  et  $(AC)$ . Déterminer les réels  $\alpha'$  et  $\gamma'$  tels que  $X$  soit barycentre de  $\{(A, \alpha'), (C, \gamma')\}$

**Exercice 7.** Soit  $ABC$  un triangle. Le point  $I$  est le symétrique de  $B$  par rapport à  $C$ . Le point  $J$  est le symétrique de  $C$  par rapport à  $A$ . Le point  $K$  est le symétrique de  $A$  par rapport à  $B$ . On obtient un nouveau triangle  $IJK$ .

1. Démontrer que  $A$  est le barycentre de  $\{(I, 2), (J, 4), (K, 1)\}$ .  
Exprimer de même sans calculs  $B$  et  $C$  comme barycentres de  $I, J, K$ .
2. Soient  $P, Q, R$  les points d'intersection respectifs des droites  $(BC), (AC), (AB)$  avec les droites  $(KJ), (IK), (JI)$ .

- (a) Démontrer que  $R$  est le barycentre de  $\{(I, 1), (J, 2)\}$ .
- (b) Énoncer les résultats analogues pour les points  $P$  et  $Q$ .

3. On donne le triangle  $IJK$ . Retrouver le triangle  $ABC$ .

**Exercice 8.**  $ABC$  un triangle et  $I$  un point tel que  $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

1. Montrer que  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$  et construire  $I$ .
2. Soit  $D$  le barycentre de  $\{(A, -1), (B, 2), (C, 1)\}$ , montrer que  $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$  et construire  $D$ .
3. (a) Construire les deux points  $E$  et  $F$  tels que  $ACBE$  et  $ADBF$  soient des parallélogramme.  
(b) Montrer que les points  $A, C$  et  $F$  sont alignés et que  $(EF)$  et  $(CD)$  sont parallèles.

**Exercice 9.** On considère un parallélogramme  $ABCD$  et  $J$  le milieu du côté  $[AC]$ .

$I$  et  $I'$  deux points tels que  $\overrightarrow{AI'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ . Le point  $K$  est le quatrième point du parallélogramme  $IAJK$ . Soit  $M$  le barycentre de  $(A, 1), (B, 2)$  et  $(C, 3)$ .

1. Exprimer comme barycentre de  $A, B$  et  $C$  chacun des points  $I, J$  et  $D$ .
2. Montrer les relations  $\overrightarrow{KI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB}$  et  $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$ . En déduire une écriture du point  $K$  comme barycentre des points  $A, B$  et  $C$ .
3. Montrer que les droites  $(BJ), (CI)$  et  $(DK)$  sont concourantes en  $M$ .
4. Montrer que les quatre points  $M, I', K$  et  $D$  sont alignés.