Exercice 1

On pose $A = \dfrac{\cos\frac{\pi}{18} - \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}}{\cos\frac{\pi}{18}\ \sin\frac{\pi}{18}}$

1. montrer que $\cos\frac{\pi}{18} - \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18} = 2\cos\frac{7\pi}{18}$
2. prouver que $\cos\frac{\pi}{18}\sin\frac{\pi}{18} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{9}$
3. déduire la valeur de A

Exercice 2

On pose $\alpha = \frac{\pi}{10}$ 1) vérifier que $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$

2) montrer que $\cos 3\alpha = \cos\alpha\left(1 - 4\sin^2\alpha\right)$

3) Déduire la valeur de $\sin\frac{\pi}{10}$ et $\cos\frac{\pi}{10}$

4) Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10}$

Montrer que $\sin\frac{7\pi}{30} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}} + 1 - \sqrt{5}\right)$

Exercice 3

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation

$(E)\quad 8X^3 - 6X - 1 = 0$

1) a) montrer que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

b) résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos 3x = \frac{1}{2}$

2) a) déduire les solutions de (E)

b) déterminer la valeur de

$a = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}$

Et $b = \cos\frac{\pi}{9}\ \cos\frac{7\pi}{9}\ \cos\frac{13\pi}{9}$

Exercice 4

Soit α de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

1) montrer que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2) a) montrer que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

b) en déduire que $\cos 3\alpha = \sin\alpha$

3) résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$\cos 3x = \sin x$ puis déduire que $\alpha = \frac{\pi}{8}$

4)résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$\cos x - \left(\sqrt{2} - 1\right)\sin x = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Exercice 5

Montrer que $\prod_{k=0}^{k=n} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^n}}$

Exercice 6

1) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ \left|\sin x + \cos x\right| \le \sqrt{2}$

2) on considère l'équation

$(E):\ 1 + \cos^3 x + \sin^3 x = \frac{3}{2}\sin 2x$

a) on pose $y = \sin x + \cos x$ calculer $\sin x \cos x$ et $\sin^3 x + \cos^3 x$ en fonction de y

b) montrer que $(E) \Leftrightarrow (y+1)\left(y^2 + 2y - 5\right) = 0$

3) résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)

Exercice 7

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1) montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$:

$\sin\frac{\pi}{6} \times \sin\frac{k\pi}{3} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{(2k-1)\pi}{6} - \cos\frac{(2k+1)\pi}{6}\right]$

2) monter que

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \times S_n = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{6}\right)\right]$

3) en déduire que

$S_n = 2\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{6}\right)\quad (\forall n \in \mathbb{N})$

Exercice 8

On pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour tout $n \ge 2$

1) calculer T_2 و T_3

2) a) prouver que $T_n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = T_n - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

b) en déduire que $T_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\quad (\forall n \ge 2)$

Exercice 9

On pose $F(x) = \cos 3x + \cos 2x$

1) résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $F(x) = 0$

2) prouver que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

3) en déduire que

$F(x) = (1 + \cos x)\left(4\cos^2 x - 2\cos x - 1\right)$

5) déterminer la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$

ذ: المانتي