

Série produit scalaire dans le plan

Exercice n°1 :

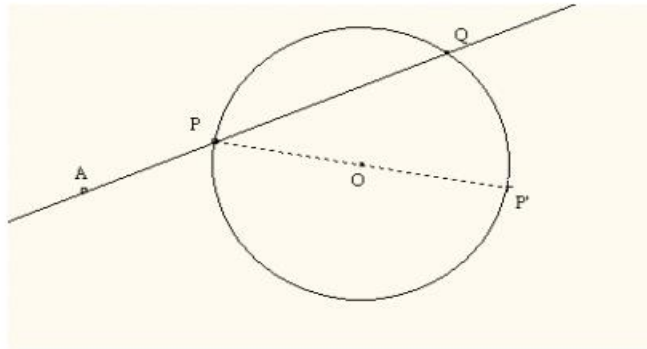
ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de $[BC]$. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI}$; $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI}$.

Exercice n°2 :

ABC est un triangle dans le quel $AB = 2$ et $AC = 3$. De plus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$.
Ce triangle est il rectangle ? (si oui préciser en quel sommet).

Exercice n°3 :

C est un cercle de centre O et de rayon R et A est un point fixé du plan.



Le but du problème est d'établir la propriété suivante :

Quelle que soit la droite (d) passant par A , coupant le cercle C en deux points P et Q , le produit scalaire $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ est constant.

1. Soit P' le point diamétralement opposé à P . Montrer que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} = AO^2 - R^2$.
3. Conclure.

Exercice n°4 :

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
2. Calculer en développant $\|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\|^2$.
3. En déduire BD

Exercice n°5 :

$ABCD$ est un rectangle de longueur L et largeur ℓ . Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC) .

1. Montrer que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = L^2 - \ell^2$ (on pourra décomposer les vecteurs suivant des directions orthogonales). En déduire HK en fonction de L et ℓ .
2. Comment choisir L et ℓ pour avoir $AC = 2 HK$.

Exercice n°6 :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(-2; 2)$ et $B(2; 2)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
2. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$
3. Démontrer que l'ensemble E des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 40$ est un cercle (C) de centre I et de rayon $r = 4$.
4. Déterminer une équation du cercle (C) .
5. Déterminer les coordonnées des (éventuels) points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
6. Soit λ un réel négatif. Comment choisir λ pour que le point $Z(\sqrt{7}, \lambda)$ soit sur (C) ?
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en Z .

Exercice n°7 :

L'unité de longueur est le centimètre.

O et A sont deux points tels que $OA = 2$.

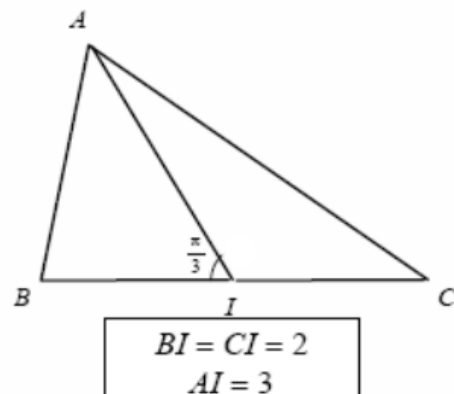
- 1) Déterminer et placer sur une figure le point H de la droite (OA) tel que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = 10$
- 2) Déterminer et représenter sur la figure précédente l'ensemble E des points M du plan tels que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 10$.
(E est la ligne de niveau 10 de la fonction $M \rightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$, avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$)

Exercice n°8 :

ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$.
(voir les données sous la figure)

Calculer :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $AB^2 + AC^2$
3. $AB^2 - AC^2$
4. AB et AC .



Exercice n°9 :

Dans un plan P on donne un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2BC = 4$.

On note $O = A * B$. $J \in [CD]$ tel que $CJ = 1$ et I le point d'intersection des deux droites (AC) et (BJ) .

- 1- a) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CJ}$. En déduire que $(AC) \perp (BJ)$.
b) Calculer BJ puis la distance du point B à la droite (AC) .
- 2- Soit $F = \{M \in P \text{ tel que } MA^2 + MB^2 = 24\}$. Déterminer et construire l'ensemble F .
- 3- On note H le point du plan défini par $BH = 2\sqrt{3}$ et $\angle ABH = \frac{\pi}{6}$ et E le point tel que $\overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HE} = \vec{0}$.
b) Calculer AH et en déduire la nature du triangle ABH .
c) Soit $F' = \{M \in P \text{ tel que } MB^2 + 2ME^2 = 30\}$. Vérifier que $A \in F'$ puis déterminer et construire l'ensemble F' .

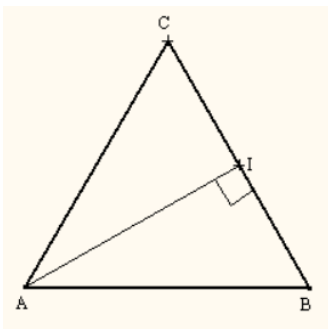
Exercice n°10 :

ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 2\sqrt{19}$.

1. a) Démontrer que $\hat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ rd. Construire le triangle ABC.
b) Calculer la distance CI où $I = A * B$.
2. Déterminer et construire chacun des ensembles suivants :
 - a) $E = \{M \in P / MA^2 + MB^2 = 92\}$.
 - b) $F = \{M \in P / MA^2 - MB^2 = -60\}$, (vérifier que $C \in F$).
 - c) $\Gamma = \{M \in P / MB^2 - 4MA^2 = 12\}$.

Solutions des exercices

Solutions de l'exercice1 :



$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos \hat{ABC} = 5 \times 5 \times \cos 60^\circ = \frac{25}{2}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = CA \times CI \times \cos \hat{ACI} = 5 \times \frac{5}{2} \times \cos 60^\circ = \frac{25}{4}$$

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$$

Exercice n°2 :

$AB = 2$ et $AC = 3$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = BA^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 4 = 0$$

$\Rightarrow$ ABC est un triangle rectangle en B.

Autrement :

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 9 - 8 = 5$$

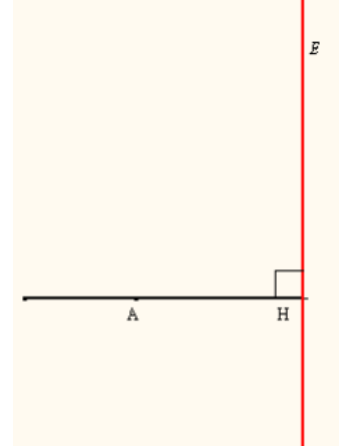
$BC^2 + BA^2 = AC^2 \Rightarrow$ BAC est un triangle rectangle en B.

Exercice n°3 :

1. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$, car Q est le projeté orthogonal de P' sur la droite (AP).
2. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP'}) = AO^2 + \overrightarrow{AO} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'})}_0 + \overrightarrow{OP} \cdot \underbrace{\overrightarrow{OP'}}_{-\overrightarrow{OP}} = AO^2 - OP^2 = AO^2 - R^2$
3. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} = AO^2 - R^2$ c'est une constante puisque A est fixe.

Exercice n°7 :

1. $H \in (OA)$ tel que : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = 10$
 $H \in (OA) \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ \text{ou} \\ -OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = 10 > 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens et } OA \times OH = 10 \Rightarrow OH = 5$
2. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 10 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OH})}_{\overrightarrow{HM}} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{HM}$
E est la droite perpendiculaire à (OA) en H.



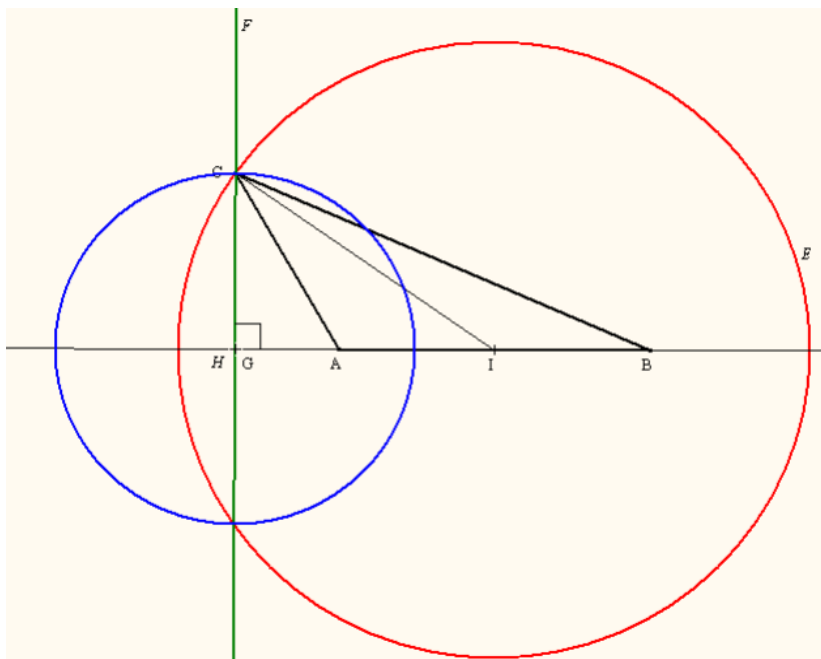
Exercice n°10 :

$AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 2\sqrt{19}$.

1. a) D'après la formule d'El Kashy, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{BAC} \Rightarrow \cos \hat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} = \frac{36 + 16 - 76}{48} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{BAC} = \frac{2\pi}{3} \text{ rd}$$



b) D'après la formule de la médiane, on a :

$$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{AB^2}{2} \Rightarrow CI^2 = \frac{CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2}}{2} = \frac{16 + 76 - 18}{2} = 37 \Rightarrow CI = \sqrt{37}$$

2. a) $E = \{M \in P / MA^2 + MB^2 = 92\}$

$$M \in E \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 92 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 92 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{92 - 18}{2} = 37 \Leftrightarrow IM = \sqrt{37}$$

$$\Leftrightarrow M \in \zeta(I, \sqrt{37})$$

Ainsi E est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{37}$ (puisque $IC = \sqrt{37} \Rightarrow C \in E$).

b) $F = \{M \in P / MA^2 - MB^2 = -60\}$

$$CA^2 - CB^2 = -60 \Rightarrow C \in F.$$

$$M \in F \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = -60 \Leftrightarrow 2\overline{IM} \cdot \overline{AB} = -60 \Leftrightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AB} = -30$$

Soit H le point de la droite (AB) tel que $\overline{IH} \cdot \overline{AB} = -30$

F est la droite perpendiculaire à (AB) en H, ou F est la perpendiculaire à (AB) passant par C.

c) $\Gamma = \{M \in P / MB^2 - 4MA^2 = 12\}$

Soit G le barycentre des points pondérés (B, 1) et (A, -4)

$$\overline{GB} - 4\overline{GA} = \vec{0}$$

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow MB^2 - 4MA^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow (\overline{MG} + \overline{GB})^2 - 4(\overline{MG} + \overline{GA})^2 = 12 \Leftrightarrow -3MG^2 + 2\overline{MG} \cdot \underbrace{(\overline{GB} - 4\overline{GA})}_{\vec{0}} + GB^2 - 4GA^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow -3MG^2 + GB^2 - 4GA^2 = 12$$

$$\text{Or } \overline{BG} = \frac{4}{3}\overline{BA} \Rightarrow BG = \frac{4}{3} \times 6 = 8 \text{ et } \overline{AG} = -\frac{1}{3}\overline{AB} \Rightarrow AG = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow -3MG^2 + 64 - 16 = 12 \Leftrightarrow 3MG^2 = 36 \Leftrightarrow MG^2 = 12 \Leftrightarrow GM = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow M \in \zeta(G, 2\sqrt{3})$$

Remarque : $C \in \Gamma$ car $CB^2 - 4CA^2 = 12 \Rightarrow \Gamma$ est le cercle de centre G et passant par C



Série produit scalaire dans le plan

Exercice 1

Soient $A(3 ; 6)$; $B(-1 ; -2)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

- 1) Déterminer m pour que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{u}$ soient :
 - a) orthogonaux
 - b) colinéaires
- 2) Pour $m = -3$
 - a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{AB}$.
 - b) En déduire une valeur de $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{AB}})$.
- 3) Déterminer une équation cartésienne de la droite orthogonale à (AB) et passant par A .

Exercice 2

On donne les points A et B tel que $AB = 3$

- 1) Soit G le barycentre des points pondérés $\{A ; 1\}$ et $\{B ; 4\}$
Déterminer GA^2 et GB^2 .
- 2) Soit $E = \{M \text{ appartient à } \mathcal{P} / MA^2 - 4MB^2 = 6\}$ déterminer et construire l'ensemble E .

Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que $AB = AC = 5$ et $BC = 6$ et soit $I = A * B$

- 1) Calculer AI
- 2) Montrer que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 7$.
- 3) Déterminer l'ensemble $E = \{M \text{ appartient à } \mathcal{P} / MA^2 - 3MI^2 = 44\}$.
- 4) Soit G le centre de gravité de ABC .

On pose $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} ; M \mapsto f(M)$ tel que $f(M) = \vec{MB} \cdot \vec{MC} - \frac{2}{3} \vec{AI} \cdot \vec{MG}$.

- a) Calculer $f(A)$ et $f(C)$.
- b) Montrer que pour tout point M du plan on a $f(M) = MG^2 + f(G)$.
- c) Déterminer suivant le réel a l'ensemble $F_a = \{M \text{ appartient à } \mathcal{P} / f(M) = a\}$.

Exercice 4

- 1) Soient A et B deux points distincts et $I = A * B$.
 - a) Construire un point C tel que le triangle AIC soit rectangle et isocèle en I.
 - b) Montrer que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{AI^2}{2}$.
- 3) Déterminer puis construire l'ensemble $E = \{M \text{ appartient à } \mathcal{P} / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{AB^2}{8}\}$.

Exercice 5

Soit ABC un triangle équilatéral direct de côté $a > 0$. Soit D le point vérifiant $2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

- 1) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de a.
- 2) Montrer que (AB) est parallèle à (DC).
- 3) Calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$. En déduire une construction de D.
- 4) Soit $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} ; M \mapsto f(M)$ tel que $f(M) = 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2$.
 - a) Vérifier que $f(C) = 0$.
 - b) Exprimer $f(M)$ en fonction de MD et a.
 - c) En déduire l'ensemble F des points M tels que $f(M) = 0$.
- 5) Soit $g: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} ; M \mapsto g(M)$ tel que $g(M) = 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DB} + a^2$. Déterminer l'ensemble G des points M tels que $g(M) = a^2$.
- 6) Soit I le point d'intersection de F et G autre que C. Montrer que CDI est triangle équilatéral.