TD-PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

Etude analytique -Applications : cercle

Exercice1 : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(1;-3)$ et $B(3;7)$ et $C(-3;1)$

1)Montrer que le triangle ABC est rectangle en C

2)Calculer la surface du triangle ABC

Exercice2: dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(5;0)$ et $B(2;1)$ et $C(6;3)$

1) Calculer $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2)en déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Exercice3 : déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A(0;1)$ et qui admet $\vec{n}(2;1)$ comme vecteur normal

Exercice4 :donner un vecteur normal a la droite (D) dans les cas suivants : 1) $(D): x-2y+5=0$

2) $(D): 2y-3=0$ 3) $(D): x-1=0$

Exercice5 : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(-3;0)$ et $B(3;0)$ et $C(1;5)$

1)déterminer une équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à la droite (AB) passant par C

2)déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) parallèle à la droite (AB) passant par C

Exercice6 : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(1;2)$ et $B(-2;3)$ et $C(0;4)$

1)déterminer une équation cartésienne de la droite (D) médiatrice du segment $[AB]$

2)déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Exercice7 : (D) $2x+3y-1=0$ et

$(D'): \frac{3}{2}x-y+4=0$

Etudier la position relative de (D) et (D')

Exercice8 : Soient la droite (D) d'équation :

$(D): 3x+4y+5=0$

1)Déterminer les coordonnées du point H la projection orthogonale de O sur (D)

2)calculer La distance du point O à la droite (D)

3)Déterminer les coordonnées du point O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Exercice9: dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(1;-1)$ et $B(4;-1)$ et $C(-2;2)$

1) Calculer : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2)en déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

3)Calculer la surface du triangle ABC

4)déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5)déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Exercice10 : déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon $r=3$

Exercice11 :Déterminer L'ensemble (E) dans les cas suivants :

1) $(E):\ x^2+y^2-x+3y-4=0$

2) $(E):\ x^2+y^2-6x+2y+10=0$

3) $(E):\ x^2+y^2-4x+5=0$

Exercice12 :Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1;2)$ et $B(-3;1)$

Exercice13 : le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. Soient les points

$A(2;3)$ $B(0;1)$; $C(-4;5)$; $E(5;2)$ et $F(2;4)$

1)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC.

2)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF

Exercice14: résoudre graphiquement le système :

$$(S)\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y+\dfrac{11}{4}\prec 0 \\ x^2+y^2+2x-4\succ 0 \end{cases}$$

Exercice15 : résoudre graphiquement le système :

$$(S)\begin{cases} (1): x^2+y^2-4x\prec 0 \\ (2): x-y-1\succ 0 \end{cases}$$

Exercice16 : Etudier la position du cercle de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=2$ avec la droite d'équation $(D): x+y+2=0$

Exercice17 : Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=2$ avec la droite d'équation $(D): x-y+2=0$

Exercice18 ::Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=1$ avec la droite d'équation $(D): y=3$

Exercice19 : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation : $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ (1)

1)Vérifier que $A(0;1)\in(C)$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.

Exercice20 :Déterminer l'*équation paramétrique du cercle* (C) de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$ avec $(\theta\in\mathbb{R})$

Exercice21 : Déterminer l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan tel que :

$$\begin{cases} x=3+\sqrt{3}\cos\theta \\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta \end{cases} \text{ avec } (\theta\in\mathbb{R})$$

Exercice22 :le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. (C) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $\begin{cases} x=2+2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$ avec $(\theta\in\mathbb{R})$

1) montrer que (C) est *le cercle* (C) dont on déterminera de centre Ω et de rayon R et une équation cartésienne

2)soit le point $A(-1;0)$; montrer que A est à l'extérieur du cercle (C) et déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A

3) déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ et qui sont parallèles à la droite : (D) : $3x-4y=0$

4)a)soit la droite (Δ) d'équation : $y=x$

Montrer que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points à déterminer

4)b) déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $\dfrac{x^2+y^2}{4}\leq x\leq y$

Exercice23:le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. Soient les points

$A(3;4)$ $B(4;1)$; $C(2;-3)$

1)montrer que les points A ; B et C sont non alignés

2)Ecrire l'équation du cercle (C) passant par A ; B et C

Exercice 24:le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. (C_m) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que :

$(C_m): x^2+y^2-2mx+2y+2m=0$ avec m Paramètre réel

1)déterminer l'ensemble (C_1)

2) a)montrer que $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$ (C_m) est *un cercle* dont déterminera le centre Ω_m et de rayon R_m

2) b) déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m\in\mathbb{R}-\{1\}$

2) b) montrer que tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe I dont déterminera et tracer $(C_0);(C_2);(C_3)$

3) a) montrer que la droite (Δ) : $x=1$ est tangente A toutes les *cercles* (C_m)

3) b)soit $m\succ\dfrac{-3}{2}$ et $m\neq 1$ et le point $A(0;1)$

Vérifier que A est à l'extérieur des *cercles* (C_m) et que la droite (AI) n'est pas tangente aux *cercles* (C_m)

Exercices sans corrections

Exercice1 : Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$

Considérons la droite (D): $2x - y + 1 = 0$ et N un point sur la droite (D) d'abscisse α.

1- Déterminer les coordonnées de N.

2- Déterminer la distance ON.

3- Déterminer pour quelle valeur de α la distance ON est minimale.

Exercice2: Considérons le triangle ABC où A (2,1) B (5,0) et C (7,6)

1- a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

b) En déduire les coordonnées du point Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

2) Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité de ABC.

3) Déterminer les coordonnées du point H, orthocentre du triangle ABC.

4) Vérifier que les points Ω , G et H sont alignés

Exercice 3: Considérons la parabole d'équation : (P): $y = x^2$ et la droite (D): $y = x - 1$

1- Tracer la droite (D) et la parabole (P).

2- Soit $N\alpha$ un point d'abscisse α et varie sur la parabole (P)

a) Déterminer en fonction de α la distance $d(N\alpha , (D))$.

b) Pour quelle valeur de α la distance $d(N\alpha , (D))$ est minimale.

Exercice4 : Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et le trinôme $f(x) = (x\vec{u} + \vec{v})^2$

1- Développer $f(x)$.

2- Déterminer le signe de $f(x)$.

3- Déterminer le discriminant de $f(x)$.

4- en déduire que pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ 5- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Exercice5 : On sait que pour trois points donnés dans le plan on a : $MA + MB \geq AB$ le but de cette activité c'est de démontrer ce résultat.

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

1- Développer $(\vec{u} + \vec{v})^2$

2- En utilisant l'inégalité précédente montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

3- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Exercice 6 : Déterminer les ensembles :

$(\Gamma 1) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0\}$

$(\Gamma 2) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - x + 2y + 4 = 0\}$

Exercice7 :

Soient les points $A(-1,0)$, $B(1,2)$ et $C(5, -2)$

1- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés

2- Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC.

Exercice8 : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation :

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$

1)Vérifier que le point A (3, −1) appartient au cercle

2- Ecrire l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.

Exercice9: Soient le cercle $(\mathcal{C})$: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ et $A(5,6)$

1- Vérifier que le point A est à l'extérieur de $(\mathcal{C})$

2- a) Déterminer l'équation de la droite (δ) passante par A et parallèle à l'axe des ordonnées.

b) Vérifier que (δ) n'est pas tangente à $(\mathcal{C})$.

3- Soit (Δ) une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : (Δ) $y = mx + p$ a) Déterminer l'équation de (Δ) en fonction de m uniquement.

b) Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au Cercle $(\mathcal{C})$.

4- Soit $B(4,5)$

a) Montrer que la droite passante par B et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Soit (Δ') une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : (Δ') $y = mx + p$; Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

Exercice10 : Résoudre graphiquement

$(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9)(2x - y + 1) \leq 0$

Exercice 11 : Soit l'ensemble :

$(C_m) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2+y^2-2mx+4my+4m^2 - 1 = 0\}$

où m est un réel.

1- Montrer que pour tout m dans $\mathbb{R}$, l'ensemble (C_m) est un cercle et déterminer ses éléments.

2- Déterminer l'équation cartésienne du plus petit cercle (C_m).

3- Déterminer l'ensemble dans lequel varient les centres Ω_m quand m décrit $\mathbb{R}$

4- a) Déterminer pour quelles valeurs de m le point $A(-1,2)$ appartient-il à (C_m)

b) Soit $M_0(x_0; y_0)$) un point donné dans le plan, existent-ils toujours des réels m qui vérifient $M_0 \in (C_m)$

5- Déterminer s'il existe l'intersection de tous les cercles (C_m)

C’est en forgeant que l’on devient forgeron » Dit un proverbe.
C’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l’on devient un mathématicien