Suites numériques

Exercice 1

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

a) Montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq U_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

b) En déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est bornée

Exercice 2

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0=-1$ ، $U_1=\frac{1}{2}$ et $U_{n+2}=U_{n+1}-\frac{1}{4}U_n$

1) on pose $V_n=U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n$ et $W_n=2^nU_n$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique puis calculer V_n en fonction de n

b) montrer que $(W_n)_n$ est une suite arithmétique puis calculer W_n en fonction de n

2) en déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_n=\frac{2n-1}{2^n}$

3) on pose $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}U_k$ prouver que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad S_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$$

Exercice 3

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que :

$$U_0=2\quad\text{et}\quad U_{n+1}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(U_n^2-U_n+\frac{1}{2}\right)}$$

On pose $V_n=U_n^2-U_n$ pour tout entier n de $\mathbb{N}$

1) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_n\geq 1$

2) a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique

b) en déduire que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{8}{2^n}}$$

3) démontrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0<U_n-1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Exercice 4

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=\frac{7U_n+6}{U_n+2}$

1) a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0<U_n<6$

b) étudier la monotonie de $(U_n)_n$

2) on pose $V_n=\frac{U_n-6}{U_n+1}$ pour tout entier naturel n

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique

b) déterminer U_n en fonction de n

3) montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad |U_{n+1}-6|\leq\frac{1}{2}|U_n-6|$$

4) montrer par récurrence que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad |U_n-6|\leq 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice 5

Soit $(U_n)_n$ la suite telle que :

$$U_0=1\quad\text{et}\quad U_{n+1}=U_n^2+U_n$$

1) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_n\geq 1$

2) montrer que $(U_n)_n$ est croissante

3) a) vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_{n+1}\geq 2U_n$

b) en déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_n\geq 2^n$

Exercice 6

$(U_n)_n$ une suite telle que :

$$U_0=-2\quad\text{et}\quad U_{n+1}=\frac{U_n^2+2}{U_n-2}$$

1) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_n\leq -1$

2) montrer que $(U_n)_n$ est croissante

3) a) montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ \left|U_{n+1}+1\right|\le\frac{1}{2}\left|U_n+1\right|$$

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ \left|U_n+1\right|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 7

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_{n+1}=\dfrac{2U_n}{1+(n+2)U_n}$ et $U_0=\dfrac{1}{3}$

1) calculer U_1

2) on pose $V_n=\dfrac{1}{U_n}-n$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique

b) exprimer U_n en fonction de n

3) calculer en fonction de n la somme $T_n=\dfrac{1}{U_0}+\dfrac{1}{U_1}+.....+\dfrac{1}{U_n}$

Exercice 8

Soit la suite $(U_n)_n$ telle que :

$$U_0=0\ ،\ U_1=1\quad et\quad U_{n+2}=\frac{1}{6}U_{n+1}+\frac{1}{6}U_n$$

1) on pose :

$$V_n=U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n\quad et\quad W_n=U_{n+1}+\frac{1}{3}U_n$$

a) montrer que $(V_n)_n$ est géométrique puis déterminer V_n en fonction de n

b) montrer que $(W_n)_n$ est géométrique puis calculer W_n en fonction de n

2) en déduire l'expression de U_n en fonction de n

Exercice 9

On considère les suites $(U_n)_{n\ge1}$ et $(V_n)_{n\ge1}$ telles que $U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n}\frac{(-1)^k}{k}$, $V_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n+1}\frac{(-1)^k}{k}$

1) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ V_n<U_n$

2) montrer que $(U_n)_{n\ge1}$ est décroissante et que $(V_n)_{n\ge1}$ est croissante

Exercice 10

(suite de Fibonacci)

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $\begin{cases}U_0=U_1=1\\ U_{n+2}=U_{n+1}+U_n\end{cases}$

1) a) montrer que $U_n>0\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

b) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

2) montrer que $U_n\ge n\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

3) montrer que $U_nU_{n+2}+(-1)^{n+1}=(U_{n+1})^2$

4) on pose $x_n=\dfrac{U_{2n-1}}{U_{2n}}$ et $y_n=\dfrac{U_{2n}}{U_{2n+1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad y_n-x_n=\frac{1}{U_{2n}U_{2n+1}}$$

en déduire $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ 0<y_n-x_n<\dfrac{1}{n}$

b) montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ x_{n+1}-x_n=\frac{1}{U_{2n}U_{2n+2}}$$

et $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ x_n=\dfrac{1}{y_n}-1$

b) montrer que $(x_n)_n$ est croissante et $(y_n)_n$ décroissante

5) on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\frac{U_k}{3^k}$

a) calculer $3S_n$ puis $3(3S_n-S_n)$

b) en déduire la relation liant U_n ; S_{n-2} , S_n

6) prouver que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

le nombre d'or : $\phi=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$