

**DEVOIR**

**Exercice 1**  $(U_n)_n$  معرفة *المعرفة* une suite réelle telle que :  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = \frac{6U_n}{1+15U_n}$

- 1) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > \frac{1}{3}$
- 2) Étudier la monotonie de  $(U_n)_n$  en déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq 1$
- 3) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{6} \left( U_n - \frac{1}{3} \right)$  en déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3} \left( \frac{1}{6} \right)^n$
- 4) on pose  $V_n = 1 - \frac{1}{3U_n}$  pour tout entier naturel  $n$ 
  - a) montrer que  $(V_n)_n$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{6}$
  - b) calculer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$
  - c) on pose  $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} V_k$  et  $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{U_k}$  déterminer  $S_n$  en fonction de  $n$   
en déduire que  $T_n = 3n + \frac{3}{5} + \frac{12}{5} \left( \frac{1}{6} \right)^{n+1}$

**Exercice 2** Soit la suite  $(U_n)_n$  définie par  $U_1 = 5$  et  $U_{n+1} = 3U_n + 4^n$ . on pose  $V_n = 4U_n - U_{n+1}$

- 1) calculer  $U_0$ ,  $U_2$  et  $V_0$
- 2) montrer que  $(V_n)_n$  est géométrique de raison  $q = 3$  et calculer  $V_n$  en fonction de  $n$
- 3) on pose  $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} V_k$  et  $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$ 
  - a) déterminer  $T_n$  en fonction de  $n$
  - b) montrer que  $V_n = U_n - 4^n$  en déduire que  $U_n = 4^n + 3^{n-1}$
  - c) montrer que  $T_n - 3S_n = U_0 - U_{n+1}$  puis déterminer  $S_n$  en fonction de  $n$

**Exercice 3** On considère la suite  $(U_n)_n$  telle que  $U_0 = 0$  ;  $U_1 = 1$  et  $U_{n+2} = \frac{1}{6}U_{n+1} + \frac{1}{6}U_n$

On pose  $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$  et  $W_n = U_{n+1} + \frac{1}{3}U_n$

- 1)
  - a) montrer que  $(V_n)_n$  est géométrique et calculer  $V_n$  en fonction de  $n$
  - b) montrer que  $(W_n)_n$  est géométrique et calculer  $W_n$  en fonction de  $n$
- 2) on pose  $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} W_k$  et  $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$ 
  - a) calculer  $S_n$  en fonction de  $n$  et déterminer  $U_n$  en fonction de  $n$
  - c) prouver que  $T_n = \frac{3}{2} - \frac{3}{10} \left( -\frac{1}{3} \right)^n - \frac{6}{5} \left( \frac{1}{2} \right)^n$