

L'ARITHMETIQUE

I) LA DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

1) Définition et conséquences

1.1 Diviseur d'un entier

Définition : Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$; on dit que l'entier relatif b divise a s'il existe un entier relatif k tel que $a = kb$;
On écrit : $b|a$.

On dit que a est divisible par b

Exemples : $3|12$ car $12 = 3 \times 4$ et $-6|42$

car $-42 = 7 \times (-6)$ et on a : 7 ne divise pas 16

Remarques :

- Si l'entier non nul b divise l'entier a alors $-b$ divise lui aussi.
- 1 divise tous les entiers relatifs
- 0 est divisible par tous les entiers non nuls : car $0 = 0 \times b$
- Si a est un entier les diviseurs de a constituent un ensemble fini noté D_a :

$$D_a = \{b \in \mathbb{Z} / b|a\}$$

Exemple :

$$D_{18} = \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$\text{et } D_{18}^+ = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

Exercice01 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

2) Déterminer dans $\mathbb{Z}$ tous les diviseurs de -8

Solution01 : 1) 156 a 12 diviseurs :

1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.

156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.

$$2) D_{-8} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$$

Propriété : $a \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{Z}$; $c \in \mathbb{Z}$

- $1/a$ et $-1/a$ et a/a et $a/-a$
- $b|a \Rightarrow |b| \leq |a|$
- $a/b \Rightarrow a/b \times c$
- $a/b \Rightarrow |a| \leq |b|$
- $b|1 \Rightarrow b \in \{-1, 1\}$

Déduction :

Si m et n sont deux entiers relatifs tels que :
 $mn = 1$ alors $|m| = 1$ et $|n| = 1$.

1.2 Multiple d'un entier.

Définition : On dit que a est un multiple de b si b est un diviseur de a

Remarque : Si b est un entier non nul, les multiples de b constituent Un ensemble infini noté $b\mathbb{Z}$

$$b\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} / m = kb \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple :

$$3\mathbb{Z} = \{\leftarrow \dots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots \rightarrow\}$$

1.3 Diviseur commun, multiple commun de deux entiers

Définition : a) Si $b|m$ et $b|n$ on dit que b est un diviseur commun de m et n

b) Si $b|m$ et $b'|m$, on dit que m est un multiple commun de b et b' .

Exemples : 4 est un diviseur commun de 16 et 12

36 est un multiple commun de 9 et 12.

Propriété : Etant donnés des entiers relatifs non nuls. On a les propositions suivantes :

- $a|b$ et $b|a \Rightarrow |a| = |b|$
- $a|b$ et $c|d \Rightarrow ac|bd$
- $a|b$ et $b|c \Rightarrow a|c$
- $a|b \Rightarrow a|bc$
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|m + n$
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|m - n$
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|\alpha m + \beta n$ où α et β sont des entiers relatifs quelconques.

$$\bullet a/b \Rightarrow a^n/b^n \quad n \in \mathbb{N}$$

Exercice02 :

1) $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$

a) montrer que si $a/2b+c$ et $a/b+c$ alors a/c

b) montrer que si $a/2b+3c$ et $a/b+c$ alors a/c

c) montrer que si $a/x-y$ et $a/b-c$ alors $a/xb-cy$

2) $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

Montrer que $a/19$

3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

Montrer que $d/13$

Solution02 : 1) a) $\begin{cases} a/2b+c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2(b+c)-(2b+c) \Rightarrow a/c$

$$1) b) \begin{cases} \frac{a}{2b+3c} \Rightarrow \frac{a}{2b+3c-2(b+c)} \Rightarrow \frac{a}{c} \\ \frac{a}{b+c} \end{cases}$$

$$1) c) \begin{cases} \frac{a}{x-y} \Rightarrow \frac{a}{bx-by} \text{ et } \frac{a}{by-cy} \Rightarrow \frac{a}{bx-cy} \\ \frac{a}{b-c} \end{cases}$$

$$2) \frac{a}{12n+1} \text{ et } \frac{a}{-2n+3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{12n+1} \text{ et } \frac{a}{-12n+18} \Rightarrow \frac{a}{19}$$

$$\Rightarrow a \in \{\pm 1; \pm 19\}$$

$$3) d \in \mathbb{Z} \text{ et } a \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{d}{n^2+3} \text{ et } \frac{d}{2n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{n^2+3} \text{ et } \frac{a}{(2n-1)^2} \Rightarrow \frac{d}{4n^2+12} \text{ et } \frac{d}{4n^2-4n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{11+4n} \text{ et } \frac{d}{-2+4n} \Rightarrow \frac{d}{13}$$

Exercice03 : $a \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$

Montrer que : $\begin{cases} \frac{a}{5x-7} \Rightarrow \frac{a}{29} \\ \frac{a}{2x+3} \end{cases}$

Solution03 : $\begin{cases} \frac{a}{5x-7} \Rightarrow \frac{a}{2(5x-7)-5(2x+3)} \\ \frac{a}{2x+3} \end{cases}$

$$\frac{a}{10x-14-10x-15} \Rightarrow \frac{a}{-29} \Rightarrow \frac{a}{29}$$

Exercice04 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} :$

3 divise $4^n - 1$ **Solution04 :**

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$
1étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons
 $4^0 - 1 = 0$ est un multiple de 3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$ donc
 $4^n = 3k + 1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$$\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} - 1 = 3k' \quad ??$$

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1$$

$$= 4 \times (3k + 1) - 1 = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$$

avec $k' = 4k + 1$ Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}; 4^n - 1 \text{ est divisible par } 3$$

Exercice05 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n + 2/3n + 1$

Solution05 : $n + 2/3n + 1$ et $n + 2/n + 2$

$n + 2/3n + 1$ et $n + 2/3n + 6$ donc

$n + 2/(3n + 6) - (3n + 1)$ donc $n + 2/5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5 donc Il faut

que $n + 2 \in \{-1; -5; 1; 5\}$ ce qui entraine que

$$n \in \{-3; -7; -1; 3\}$$

On vérifie que que si $n \in \{-3; -7; -1; 3\}$ alors

$n + 2/3n + 1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n + 2/3n + 1$ sont : -7 ; -3 ; -1 ; 3

Exercice 06 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Solution06 : Cette fraction a un sens si : $n + 4 \neq 0$ soit $n \neq -4$

On constate que $3n + 8 = 3(n + 4) - 4$

$n + 4$ divise $3(n + 4)$, donc $n + 4$ divise $3n + 8$ si

$n + 4$ divise -4.

Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.

Il faut que $n + 4 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ ce qui

entraine que $n \in \{-8; -6; -5; -3; -2; 0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un

entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0.

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes : a) $x^2 - y^2 = 32$ avec $x > y$

$$b) 2xy + 2x + y = 99$$

Solution07 : a) $x^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 32$

$x - y$ et $x + y$ sont des diviseurs positif de 32

Et $(x - y) + (x + y) = 2x$ est u nombre pair

Donc $x - y$ et $x + y$ ont la même parité $32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x - y$	2	4
$x + y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$$S = \{(6; 2); (9; 7)\}$$

$$b) 2xy + 2x + y = 99 \Leftrightarrow 2xy + y + 2x + 1 - 1 = 99$$

$$\Leftrightarrow y(2x + 1) + 2x + 1 = 99 + 1 \Leftrightarrow (2x + 1)(y + 1) = 100$$

Donc : $2x + 1$ et $y + 1$ sont des diviseurs positif de 100

$$D_{100} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$$

$2x + 1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y + 1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$$S = \{(0; 99); (2; 19); (12; 3)\}$$

2) La division euclidienne

2.1 La division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

Propriété : Considérons a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$; ils existent deux entiers naturels q et r tels que $a = bq + r$ où $0 \leq r < b$

- L'entier a s'appelle : **Le divisé**
- L'entier b s'appelle : **Le diviseur**
- L'entier q s'appelle : **Le quotient**
- L'entier r s'appelle : **Le reste**

Remarque : Si r est le reste de la division euclidienne par b alors : $r \in \{0, 1, \dots, b-1\}$.

Exemple1 :

la division euclidienne de 75 par 8 donne :

$$75 = 9 \times 8 + 3 \text{ car } 0 \leq 3 < 8$$

la division euclidienne de 126 par 7 donne :

$$126 = 18 \times 7 + 0 \text{ car } 0 \leq 0 < 7$$

la division euclidienne de 85 par 112

$$\text{donne : } 85 = 0 \times 112 + 85 \text{ car } 0 \leq 85 < 112$$

Exemple2 : Un entier naturel n peut s'écrire de l'une des façons suivantes

$$n = 5k \text{ ou } n = 5k + 1 \text{ ou } n = 5k + 2$$

$$\text{ou } n = 5k + 3 \text{ ou } n = 5k + 4 \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

Exercice 08 : déterminer le nombre entier naturel n Tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 ($p \in \mathbb{N}$)

Solution08 : $n \in \mathbb{N} : n = 25p + p^2$ et $0 \leq p^2 < 25$
donc $0 \leq p < 5$

$$\text{Donc : } \begin{cases} p=0 \\ n=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p=1 \\ n=26 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p=2 \\ n=54 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p=3 \\ n=84 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p=4 \\ n=116 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } n \in \{0; 26; 54; 84; 116\}$$

Exercice 09: n et a et b des entiers naturels
Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution09 : soit r le reste de la division euclidienne de n par a et r' le reste de la division euclidienne de q par b on a donc :

$$n = aq + r \text{ et } 0 \leq r \leq a-1 \text{ et on a : } q = bq' + r'$$

et $0 \leq r' \leq b-1$ donc on déduit que :

$$n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$$

Et puisque : $0 \leq r' \leq b-1$ et $0 \leq r \leq a-1$ alors :

$$ar' + r \leq ab-1 \text{ donc } n = abq' + ar' + r$$

$0 \leq ar' + r \leq ab-1$ conclusion : q' est aussi le quotient de n par ab

2.2 La division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Propriété : Considérons a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$; ils existent un entiers relatif q et un entier naturel r

Tels que : $a = bq + r$ où $0 \leq r < |b|$

Exemple1 :1) la division euclidienne de 37 par -11 donne : $37 = (-11) \times (-3) + 4$ car $0 \leq 4 < 11$

2) la division euclidienne de -37 par 11

$$\text{donne : } -37 = 11 \times (-4) + 7 \text{ car } 0 \leq 7 < 11$$

3) la division euclidienne de -37 par -11

$$\text{donne : } -37 = (-11) \times 4 + 7 \text{ car } 0 \leq 7 < 11$$

Exercice10: $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$

si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

Solution10 : soit r le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b donc :

$$a-1 = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b$$

$$\text{Donc : } ab^9 - b^9 = b^{10}q + rb^9$$

$$\text{Donc : } ab^9 - 1 = b^{10}q + rb^9 + b^9 - 1$$

$$\text{Donc : } ab^9 - 1 = b^{10}q + (r+1)b^9 - 1$$

On montre que : $0 \leq (r+1)b^9 - 1 < b^{10}$???

On a : $0 \leq r < b$ donc $0 \leq r+1 \leq b$

$$\text{donc } 0 \leq (r+1)b^9 \leq b^{10} \text{ donc } 0 \leq (r+1)b^9 - 1 \leq b^{10} - 1$$

$$\text{donc } 0 \leq (r+1)b^9 - 1 < b^{10}$$

conclusion : q est aussi le quotient de la

division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

II) LES NOMBRES PREMIERS

1) Définition et propriétés

Définitions : a) On dit que l'entier d est un diviseur effectif de l'entier relatif a

Si $d|a$ et $|d| \neq 1$ et $|d| \neq |a|$

b) On dit qu'un entier relatif non nul p est

premier s'il est différent de 1 et s'il n'admet pas de diviseurs effectifs.

Remarques :

- Un nombre premier p admet exactement deux diviseurs positifs 1 et $|p|$.
- Si p est un nombre premier positif alors p n'admet pas de diviseurs effectifs de même
 - p n'admet pas de diviseurs effectif d'où :
 - $-p$ est aussi premier ;
- Pour l'étude des nombres premiers on se contente d'étudier les nombres premiers positifs.

Propriété : Soit a un entier naturel non nul différent de 1 et non premier, le plus petit

diviseur de a différent de 1 est un nombre premier

Exemple1 : Les nombres -3 et -7 et 23 sont premiers.

2) Détermination d'un nombre premier

Propriété : Soit n un entier naturel non nul, différent de 1 et non premier, il existe un nombre premier p qui divise l'entier n et qui vérifie $p^2 \leq n$.

Remarque : Cette propriété nous permet de déterminer si un nombre est premier ou non.

Corolaire : Si un entier n n'est divisible par aucun entier premier p et qui vérifie $p^2 \leq n$ alors n est premier.

Exercice: 1) Les nombres suivants sont-ils premiers : 499 ; 601 ; 703 ; 2003 ; $2n^2 + 3n$ $n \in \mathbb{N}$

Théorème : L'ensemble des nombres premiers est infini.

III) PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN, PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN.

1) Plus grand diviseurs commun

1.1 Définition et propriété

Définition : On dit que le nombre d est le **plus grand diviseur commun** de deux entiers relatifs a et b lorsque d divise a et d divise b et qu'il n'y a pas d'autre plus grands diviseurs de ces deux nombres.

On note $d = PGDC(a, b) = a \wedge b$

Exemple :

$$-48 \wedge 36 = 12$$

Propriétés : 1) $a \wedge a = |a|$ 2) $1 \wedge a = 1$

$$3) (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$4) \text{ Si } b|a \text{ alors } a \wedge b = |b|$$

$$5) \text{ si } d|a \text{ et } d|b \text{ alors } d|(a \wedge b)$$

Exercice11 : montrer que $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \wedge (a+1) = 1$

Solution11 : on pose $d = a \wedge (a+1)$

$$\Rightarrow d/a \text{ et } d/(a+1) \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

Exercice12 : $n \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = n^2 + 3$ et $B = n+2$

1) montrer que $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N}$

Solution12 : 1) on pose $d = A \wedge B$ et $d' = (n+2) \wedge 7$

On a : $d = A \wedge B$

$$\Rightarrow d/A \text{ et } d/B \Rightarrow d/(n^2+3) \text{ et } d/(n+2)$$

$$\Rightarrow d/(n^2+3) \text{ et } d/(n+2) \text{ on utilisant la division euclidienne : on trouve : } n^2+3 = (n+2)(n-2)+7$$

$$n^2+3 - (n+2)(n-2) = 7$$

$$\Rightarrow d/(n^2+3 - (n+2)(n-2))$$

$$\Rightarrow d/7 \text{ et } d/(n+2) \Rightarrow d/(n+2) \wedge 7 \Rightarrow d/d'$$

Inversement : On a : $d' = (n+2) \wedge 7$

$$\Rightarrow d'/(n+2) \text{ et } d'/7 \Rightarrow d'/(n+2)(n-2) \text{ et } d'/7$$

$$\Rightarrow d'/(n+2)(n-2)+7 \text{ et } d'/7 \Rightarrow d'/(n^2+3) \text{ et } d'/7$$

$$\text{donc : } d'/A \wedge B \text{ donc } d'/d$$

$$\text{donc } d/d' \text{ et } d'/d \text{ et } d \in \mathbb{N} \text{ et } d' \in \mathbb{N} \text{ donc}$$

$$\text{donc } d = d' \text{ donc : } A \wedge B = (n+2) \wedge 7$$

$$2) \frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{n+2}{n^2+3} \text{ et on a : } \frac{n+2}{n+2}$$

$$\text{Donc : } \frac{n+2}{A \wedge B} \text{ Donc : } \frac{n+2}{(n+2) \wedge 7}$$

Donc : $\frac{n+2}{7}$ or 7 est premier donc :

Il faut que $n+2 \in \{1; 7\}$ ce qui entraîne que $n=5$

Définition : On dit que deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.

Exemple : 21 et 10 sont premiers entre eux.

Exercice 13: $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que : $a = bc + d$

1) montrer que $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que : $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

Solution13 : 1) on pose $\Delta_1 = a \wedge b$ et $\Delta_2 = b \wedge d$

$$\text{On a : } \Delta_1/a \text{ et } \Delta_1/b \text{ donc } \Delta_1/a \text{ et } \Delta_1/bc \text{ donc}$$

$$\Delta_1/(a-bc) \text{ donc } \Delta_1/d$$

$$\text{donc } \Delta_1/d \text{ et } \Delta_1/b \text{ donc } \Delta_1/(b \wedge d) \text{ donc } \Delta_1/\Delta_2$$

$$\text{inversement On a : } \Delta_2/b \text{ et } \Delta_2/d \text{ donc } \Delta_2/d \text{ et}$$

$$\Delta_2/bc \text{ donc } \Delta_2/(bc+d) \text{ donc } \Delta_2/a$$

$$\text{donc } \Delta_2/a \text{ et } \Delta_2/b \text{ donc } \Delta_2/(a \wedge b) \text{ donc } \Delta_2/\Delta_1$$

$$\text{On a donc : } \Delta_1/\Delta_2 \text{ et } \Delta_2/\Delta_1 \text{ et } \Delta_1 \in \mathbb{N} \text{ et } \Delta_2 \in \mathbb{N}$$

$$\text{donc } \Delta_1 = \Delta_2$$

$$\text{donc : } a \wedge b = b \wedge d$$

2) on a : $a = bc + (a - bc)$ si on prend : $d = a - bc$ et d'après 1) on aura : $a \wedge b = b \wedge d = b \wedge (a - bc)$

Exercice14 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A=35a+57$ et $B=45a+76$ montrer que $A \wedge B=1$ ou $A \wedge B=19$

Solution14 : 1) on pose $d = A \wedge B$

$$\Rightarrow d \mid A \text{ et } d \mid B \Rightarrow d \mid 35a+57 \text{ et } d \mid 45a+76$$

$$\Rightarrow d \mid 9(35a+57) \text{ et } d \mid 7(45a+76)$$

$$\Rightarrow d \mid 315a+513 \text{ et } d \mid 315a+532$$

$$\Rightarrow d \mid 19 \text{ or } 19 \text{ est premier donc :}$$

Il faut que $d \in \{1;19\}$ ce qui entraîne que :

$$A \wedge B=1 \text{ ou } A \wedge B=19$$

1.2 L'algorithme d'Euclide.

Théorème : Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul on a : $a = bq + r$

Où $0 \leq r < b$ on a : $a \wedge b = b \wedge r$

L'algorithme d'Euclide.

Propriété : Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Le plus grand diviseur commun de a et b est le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives.

Application :

1- Trouver le PGDC (362154, 82350).

2- Déterminer tous les diviseurs communs de 362154 et 82350.

Propriété : Soient a et b deux entiers relatifs non nuls

Les diviseurs communs de a et b sont les diviseurs de $a \wedge b$.

On peut dire que : $D_a \cap D_b = D_{a \wedge b}$

Exercice : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$1) n \wedge (n+1) = 1 \quad 2) n \wedge (2n+1) = 1$$

$$3) (2n+1) \wedge (3n+1) = 1$$

2) Le plus petit multiple commun.

Définition et propriété

Définition : On dit que le nombre entier naturel m est le **plus petit multiple commun** de deux entiers relatifs a et b lorsque

m est un multiple de a et de b et qu'il n'y a pas d'autre plus petit multiple non nuls de ces deux nombres. On note : $m = PPCM(a, b) = a \vee b$

Exemple : $-48 \wedge 36 = 144$

Propriétés :

$$1) a \vee a = |a| \quad 2) a \vee b = b \vee a$$

$$3) a \vee 1 = |a| \quad 4) \text{ Si } b \mid a \text{ alors } a \vee b = |a|$$

$$5) a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$6) a \mid (a \vee b) ; b \mid (a \vee b) \text{ et } (a \vee b) \mid ab$$

Propriété : Considérons a et b deux entiers relatifs. Si $a \vee b = m$ et M un multiple commun de a et b alors $m \mid M$.

Indications pour preuve :

Poser $M = qm + r$ on a : $a \mid m, a \mid M$ conclure. De même pour b et si $r \neq 0$ aboutir à une contradiction.

IV) LA CONGRUENCE MODULO n

1) Définition et propriétés.

Activité : Quelle relation y a-t-il entre ces nombres -11, 15, 67, 28, 132 et 13.

Définition : Soient a et b deux entiers relatifs ; et n un entier naturel non nul. On dit que : a est congrue à b modulo n si $n \mid (b - a)$.

On écrit : $a \equiv b [n]$

Exemples : $122 \equiv 27 [5]$ $34 \equiv 13 [7]$

Propriété : Si $a \equiv b [n]$ alors a et b ont le même reste de la division euclidienne sur n

Propriété fondamentale :

1) $(\forall a \in \mathbb{Z})(a \equiv a [n])$ on dit que la relation de congruence est réflexive.

2) $(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2)(a \equiv b [n] \Leftrightarrow b \equiv a [n])$: on dit que la relation de congruence est symétrique.

3) $(\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3)$

$(a \equiv b [n] \text{ et } b \equiv c [n]) \Rightarrow a \equiv c [n]$: on dit que la relation de congruence est transitive.

Définition : Puisque la relation est de congruence est réflexive, symétrique et transitive on dit que la relation de congruence est une **relation d'équivalence**

2) Compatibilité de la relation d'équivalence avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Propriété et définition : Soit n un entier naturel non nul. Si $a \equiv b [n]$ et $c \equiv d [n]$ alors :

1) $a + c \equiv b + d [n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition dans $\mathbb{Z}$

2) $ac \equiv bd [n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Corolaire : Si $a \equiv b [n]$ alors pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a : $a^k \equiv b^k [n]$

Remarque : La réciproque du corolaire n'est pas vraie : $2^4 \equiv 3^4 [5]$ mais $2 \not\equiv 3 [5]$

Exercice15 : $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19 Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

$$1) a+b \quad 2) a^2+b^2 \quad 3) 2a-5b$$

Solution15 : 1) On a : $a \equiv 17 [19]$ et $b \equiv 15 [19]$

$$\text{donc } a+b \equiv 17+15 [19] \Leftrightarrow a+b \equiv 13 [19]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a+b$ Par 19 est : 13

a) montrer que $a \wedge b = b \wedge 7$
b) en déduire les valeurs possibles $a \wedge b = d$
c) montrer que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$
d) en déduire les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$

Solution19 : 1) on pose $d = x \wedge y$ et $d' = a \wedge b$
montrons que : $d = d'$
 $d = x \wedge y$ donc : $\Rightarrow d/x$ et $d/y \Rightarrow d/a$ et d/b
Car il divise toute combinaison de x et y
 $\Rightarrow d/a \wedge b \Rightarrow d/d'$
Inversement :
 $d' = a \wedge b \Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/9x+4y$ et $d'/2x+y$
 $\Rightarrow d'/(9x+4y) - 4(2x+y)$ et $d'/9(2x+y) - 2(9x+4y)$
 $\Rightarrow d'/x$ et $d'/y \Rightarrow d'/x \wedge y \Rightarrow d'/d$
ce qui entraîne : $d = d'$

2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$
a) montrons que $a \wedge b = b \wedge 7$?
la division euclidienne de $n^2 + 5n + 13$ par $n + 3$
donne : $n^2 + 5n + 13 = (n + 3)(n + 2) + 7$
Donc : $a = b(n + 2) + 7 \Leftrightarrow a - b(n + 2) = 7$
on pose $d' = b \wedge 7$ et $d = a \wedge b$
montrons que : $d = d'$
 $d = a \wedge b \Rightarrow d/a$ et $d/b \Rightarrow d/a - b(n + 2)$ et d/b
 $\Rightarrow d/7$ et $d/b \Rightarrow d/b \wedge 7 \Rightarrow d/d'$
 $d' = b \wedge 7 \Rightarrow d'/7$ et $d'/b \Rightarrow d'/b(n + 2) + 7$ et d'/b
 $\Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/a \wedge b \Rightarrow d'/d$
ce qui entraîne : $d = d'$

b) les valeurs possibles $a \wedge b = d$??
on a : $a \wedge b = b \wedge 7 = d$
donc : $d/7$ donc : $d = 1$ ou $d = 7$

c) montrons que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$
 $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow n + 3 \equiv 0[7] \Leftrightarrow 7/n+3 \Leftrightarrow 7/b \Leftrightarrow b \wedge 7 = 7 \Leftrightarrow b \wedge a = 7$

d) les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$??
 $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow n$ n'est pas congrue a 0 modulo 4
 $n \equiv 0[7]$ ou $n \equiv 1[7]$ ou $n \equiv 2[7]$ ou $n \equiv 3[7]$ ou $n \equiv 5[7]$
ou $n \equiv 6[7]$

3) Les classes d'équivalences.

3.1 Définition et propriété :

Activité : Déterminer l'ensemble des entiers relatifs qui admettent 2 pour reste de la division par 7.

Définition : Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste r de la division euclidienne par n s'appelle

la classe d'équivalence de r et se note : $\bar{r} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv r [n]\} = \{nk + r \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple : Pour $n = 7$ les restes possibles sont les éléments de l'ensemble : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Donc on peut définir les classes d'équivalences suivantes :

$$\bar{0} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv 0 [7]\}$$

$$\bar{1} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv 1 [7]\} \text{ et } \dots$$

$$\bar{6} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv 6 [7]\}$$

on remarque que $\bar{0} = \bar{7}$

Les classes d'équivalences modulo 7 constituent : un ensemble noté :

$$\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}\}$$

$$\text{Généralisation : } \mathbb{Z} / n\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \dots; \overline{n-1}\}$$

3.2 Les opérations sur $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$

Définition : Soit n un entier naturel non nul.

On définit dans $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ les deux lois :

1) **L'addition :** On pose $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$

2) **La multiplication :** On pose : $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$

Exemple : Dans $\mathbb{Z} / 6\mathbb{Z}$: $\bar{3} \times \bar{4} = \bar{0}$ et $\bar{5} + \bar{4} = \bar{3}$

Exercice20: Résoudre les équations

suivantes dans $\mathbb{Z} / 4\mathbb{Z}$: 1) $\bar{2}x = \bar{3}$ 2) $x^2 + \bar{3}x = \bar{0}$

3) $\bar{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Solution20 : On a : $\mathbb{Z} / 4\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}\}$

1) On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que Cette équation n'admet pas de solutions

Donc : $S = \emptyset$

1) On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$x^2 + \bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont solutions de l'équation

Donc : $S = \{\bar{0}; \bar{1}\}$

$$2) \overline{2013}x^3 + \overline{2}x = \overline{k} \Leftrightarrow \overline{1}x^3 + \overline{2}x = \overline{k} \Leftrightarrow x^3 + \overline{2}x = \overline{k}$$

Car : $2013 = 503 \times 4 + 1$

On Dresse une table comme suite :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
x^3	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$x^3 + \overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$$\text{Si } \overline{k} = \overline{0} : S = \{\overline{0}; \overline{2}\} \quad \text{Si } \overline{k} = \overline{1} : S = \{\overline{3}\}$$

$$\text{Si } \overline{k} = \overline{2} : S = \emptyset \quad \text{Si } \overline{k} = \overline{3} : S = \{\overline{1}\}$$

Exercice21 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ l'équations

$$\text{suivants : } x + \overline{3}y = \overline{1}$$

Solution21 : on Dresse une table des opérations

de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}; \overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}\}$ Comme suite

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$

$$S = \{(\overline{0}; \overline{2}); (\overline{1}; \overline{0}); (\overline{2}; \overline{3}); (\overline{3}; \overline{1}); (\overline{4}; \overline{3}); (\overline{4}; \overline{4})\}$$

Exercice22 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ les

$$\text{système suivants : } \begin{cases} \overline{3}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases}$$

Solution22 :

$$\begin{cases} \overline{3}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\overline{3} + \overline{2})x + (\overline{2} + \overline{4})y = \overline{3} + \overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \overline{4} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \overline{1} \\ y = \overline{4} \end{cases} \text{ donc } S = \{(\overline{1}; \overline{4})\}$$

Exercice : 1) Dresser les tables des opérations de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations :

$$\text{a) } \overline{2}x - \overline{1} = \overline{0} \quad \text{b) } \overline{4}x + \overline{1} = x + \overline{3}$$

$$\text{c) } \overline{5}x^2 + \overline{3}x + \overline{1} = \overline{0}$$

Propriété : Si p est **premier** alors dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a :

$$(\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0} \text{ ou } \overline{b} = \overline{0})$$

Preuve : Après la décomposition.

IV) DECOMPOSITION D'UN ENTIER EN FACTEURS DES NOMBRES PREMIERS

1) Définition et propriétés

Activité : Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre : 24816

Théorème :

a) Chaque entier **naturel** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers comme suite :

$$m = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$$

b) Chaque entier **relatif** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers

comme suite :

$$m = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$$

où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$

Propriété 1: Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme :

$$a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$$

un entier d non nul divise l'entier a si et seulement si d à une décomposition de la forme

$$d = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times p_3^{\beta_3} \times \dots \times p_n^{\beta_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k} \delta n \text{ où}$$

$$(\forall i \in [1, n]) (0 \leq \beta_i \leq \alpha_i)$$

δn un diviseur de a le nombre des valeurs possibles de δi est $\alpha_i + 1$

On en déduit que :

Propriété 2 :

$$a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$$

est un entier, le nombre des diviseurs de a

$$\text{est : } 2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$$

Exercice :

1- Décomposer le nombre 2975 en facteurs des nombres premiers

2- Déterminer le nombre des diviseurs de 2975.

3- Déterminer tous les diviseurs positifs de 2975.

Propriété 3 : Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme :

$$a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$$

un entier m est un multiple de a si et seulement

$$\text{si } m = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times p_3^{\beta_3} \times \dots \times p_n^{\beta_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$$

où $(\forall i \in [1, n])(\alpha_i \leq \beta_i)$

2) Application de la décomposition.

Propriété : Soient a et b deux entiers naturels

1) Le plus grand entier n qui vérifie :

$$n \leq a \text{ et } n \leq b \text{ est } \inf(a, b)$$

2) Le plus petit entier n qui vérifie :

$$n \geq a \text{ et } n \geq b \text{ est } \sup(a, b)$$

Exemple : $a = 7$ et $b = 10$

Le plus grand des entiers n tel que :

$$n \leq 7 \text{ et } n \leq 10 \text{ est : } 7 = \inf(10, 7)$$

Le plus petit des entiers n tel que :

$$n \geq 7 \text{ et } n \geq 10 \text{ est } 10 = \sup(10, 7)$$

2.1 Le P.G.C.D de deux nombres.

Soient $a = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k} = 1$ et $b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers ; le P. G. D. C (a, b) est l'entier

$$a \wedge b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\inf(\alpha_k; \beta_k)}$$

Remarque : Soient a et b deux entiers relatifs

$$\text{on a : } a \wedge b = |a| \wedge |b|$$

Exemple : Déterminer : $(-5664) \wedge (-984)$ et

$$324 \wedge (-144)$$

Exercice :

1- Décomposer les nombres 362154 et 82350 en produit des facteurs premiers

2- Déterminer le P.G.C.D de 362154 et 82350

3- Déterminer tous les diviseurs communs de 362154 et 82350

2.2 Le P.P.C.M de deux nombres.

Soient $a = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k} = 1$ et $b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers ; le ppmc (a, b) est l'entier

$$a \vee b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\sup(\alpha_k; \beta_k)}$$

Exemple : déterminer : $d = (-8316) \wedge 1080$ et

$$m = 8316 \vee 1080$$

Solution : la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

$$\text{Donnent : } 8316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11 \text{ et}$$

$$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$$

$$d = 8316 \wedge 1080 = 2^2 \times 3^3 = 108 \text{ et}$$

$$m = 8316 \vee 1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = 11880$$

2.3 Applications de la décomposition.

Propriété : Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, on a les assertions suivantes :

$$1) (a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$$

$$2) ca \vee cb = c(a \vee b)$$

$$3) ca \wedge cb = c(a \wedge b)$$

Exemple : si $2 = a \wedge b$ et $-12 = a \times b$

déterminer : $a \vee b$

Solution : on a $a \wedge b \times (a \vee b) = |ab|$

$$\text{donc : } a \vee b = |a \times b| / a \wedge b = |-12| / 2 = 6$$

Exercice23: $a = (25^n - 1)(36^n - 1)$ et $b = (5^n - 1)(6^n - 1)$

Calculer les $a \vee b$ ($n \in \mathbb{N}$)

Solution23 :

$$a = ((5^n)^2 - 1)((6^n)^2 - 1) = (5^n - 1)(5^n + 1)(6^n - 1)(6^n + 1)$$

$$a = b(5^n + 1)(6^n + 1) \text{ donc : } \frac{b}{a} \text{ donc : } a \vee b = a$$

V) Exercices avec solutions

Exercice24: n et a et b des entiers naturels

Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q

par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution : soit r le reste de la division

euclidienne de n par a et r' le reste de la

division euclidienne de q par b on a donc :

$$n = aq + r \text{ et } 0 \leq r \leq a - 1 \text{ et on a : } q = bq' + r' \text{ et}$$

$$0 \leq r' \leq b - 1 \text{ donc on déduit que :}$$

$$n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$$

Et puisque : $0 \leq r' \leq b - 1$ et $0 \leq r \leq a - 1$ alors :

$$ar' + r \leq ab - 1 \text{ donc } n = abq' + ar' + r$$

$$0 \leq ar' + r \leq b - 1 \text{ conclusion : } q' \text{ est aussi le}$$

quotient de n par ab

Exercice25: Déterminer le reste de la division

euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

Solution25 : on a $19 \equiv 5[7]$ donc $19^2 \equiv 4[7]$

$$\text{donc : } 19^4 \equiv 2[7] \text{ donc } 19^{52} \equiv 2^{13}[7]$$

$$\text{Et on a } 23 \equiv 2[7] \text{ donc } 23^{41} \equiv 2^{41}[7] \text{ donc}$$

$$23^{41} \times 19^{52} \equiv 2^{13} \times 2^{41}[7]$$

$$\text{donc } 23^{41} \times 19^{52} \equiv 2^{54}[7] \text{ donc}$$

$$23^{41} \times 19^{52} \equiv (2^3)^{18}[7] \text{ donc } 23^{41} \times 19^{52} \equiv 8^{18}[7]$$

$$\text{et puisque : } 8 \equiv 1[7] \text{ donc } 23^{41} \times 19^{52} \equiv 1[7]$$

conclusion : 1 est le reste de la division

euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

Exercice26: $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = 4^n - 3n - 1$

1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$ divise $4^n - 3n - 1$

Solution26 : 1) on a $U_{n+1} = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1$

donc $U_{n+1} = 4 \times 4^n - 3n - 3 - 1$

et puisque : $U_n = 4^n - 3n - 1$ donc :

$4^n = U_n + 3n + 1$ donc : $U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) notons P(n) La proposition suivante : « 9

divise U_n ». Nous allons démontrer par

récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1 étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons

$U_0 = 4^0 - 3 \times 0 - 1 = 0$ donc 9 divise 0 .

Donc P (0) est vraie.

2 étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence

: Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : « 9 divise U_n »

3 étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : « 9 divise U_{n+1} » ??

c'est-à-dire Montrons que $U_{n+1} \equiv 0[9]$??

On a d'après l'hypothèse de récurrence: « 9

divise U_n » donc $U_n \equiv 0[9]$ donc $4U_n \equiv 0[9]$

Et on a : $9n_n \equiv 0[9]$ donc $U_n + 9n_n \equiv 0[9]$ donc

$U_{n+1} \equiv 0[9]$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$ divise $4^n - 3n - 1$

Exercice27: 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation:

$$\bar{4}x - \bar{3} = \bar{0}$$

2) Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation: $x^2 - x - \bar{2} = \bar{0}$

Solution27 : 1) on Dresse une table des

opérations de $\mathbb{Z} / 5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$

Comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{4}x$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{4}x - \bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$

Et on utilisons cette une table on déduit que $\bar{2}$ est la seul solution de l'équation

Donc : $S = \{\bar{2}\}$..

$$2): \begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{3} + \bar{2})x + (\bar{2} + \bar{4})y = \bar{3} + \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \bar{4} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{1} \\ y = \bar{4} \end{cases} \text{ donc } S = \{(\bar{1}; \bar{4})\}$$

3) on Dresse une table des opérations de

$$\mathbb{Z} / 5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$$

Comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$x^2 - x - \bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$

Et on utilisons cette une table on déduit que $\bar{2}$ et $\bar{4}$ sont les solutions de l'équation

Donc : $S = \{\bar{2}; \bar{4}\}$

Exercice28: $n \in \mathbb{Z}$ on pose $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$

1) montrer que $n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4$ sont des nombres paires

2) En déduire que α_n n'est pas un nombre premier

Solution28 : 1) soit $n \in \mathbb{Z}$

$$n^2 - 3n + 4 \equiv n^2 - n[2] \text{ donc}$$

$$n^2 - 3n + 4 \equiv n(n-1)[2]$$

Or $n(n-1)$ est le produit de deux nombres

consécutifs donc paire

$$\text{donc } n(n-1) \equiv 0[2] \text{ donc } n^2 - 3n + 4 \equiv 0[2]$$

donc $n^2 - 3n + 4$ est un nombre paire

$$\text{et on a : } n^2 + 3n + 4 \equiv n^2 + n[2] \text{ donc}$$

$$n^2 + 3n + 4 \equiv n(n+1)[2]$$

Or $n(n+1)$ est le produit de deux nombres

consécutifs donc paire

$$\text{donc } n(n+1) \equiv 0[2] \text{ donc } n^2 + 3n + 4 \equiv 0[2]$$

donc $n^2 + 3n + 4$ est un nombre paire

2)

$$\alpha_n = n^4 - n^2 + 16 = (n^2 + 4)^2 - 9n^2 = (n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4)$$

Et puisque $n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4$ sont des nombres paire

$$\text{alors : } n^2 - 3n + 4 \neq 1 \text{ et } n^2 + 3n + 4 \neq 1$$

donc α_n n'est pas un nombre premier

Exercice29: $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que : $a = bc + d$

1) montrer que $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que : $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

Solution29 : 1) on pose $\Delta_1 = a \wedge b$ et $\Delta_2 = b \wedge d$

On a : Δ_1 / a et Δ_1 / b donc Δ_1 / a et Δ_1 / bc donc

$\Delta_1 / a - bc$ donc Δ_1 / d

donc Δ_1 / d et Δ_1 / b donc $\Delta_1 / b \wedge d$ donc Δ_1 / Δ_2

inversement On a : Δ_2 / b et Δ_2 / d donc Δ_2 / d et

Δ_2 / bc donc $\Delta_2 / bc + d$ donc Δ_2 / a

donc Δ_2 / a et Δ_2 / b donc $\Delta_2 / a \wedge b$ donc Δ_2 / Δ_1

On a donc : Δ_1 / Δ_2 et Δ_2 / Δ_1 et $\Delta_1 \in \mathbb{N}$ et $\Delta_2 \in \mathbb{N}$

donc $\Delta_1 = \Delta_2$

donc : $a \wedge b = b \wedge d$

2) on a : $a = bc + (a - bc)$ si on prend : $d = a - bc$ et d'après 1) on aura : $a \wedge b = b \wedge d = b \wedge (a - bc)$

Exercice30: $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \geq 3$ et a est impair On pose : $d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$

1) a) montrer que $2^{ab} \equiv 1[d]$

b) montrer que $2^{ab} \equiv -1[d]$

2) En déduire que : $d \in \{1; 2\}$

3) montrer que $d = 1$

Solution31 : 1) a) montrons que $2^{ab} \equiv 1[d]$

On a : $d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$

Donc il existent : $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$2^a - 1 = d\alpha$ et $2^b + 1 = d\beta$ donc :

$2^{ab} = (2^a)^b = (d\alpha + 1)^b$

Et on a : $d\alpha + 1 \equiv 1[d]$ Donc $(d\alpha + 1)^b \equiv 1[d]$

Par suite : $2^{ab} \equiv 1[d]$

1) a) montrons que $2^{ab} \equiv -1[d]$

On a : $2^{ab} = (2^b)^a = (d\beta - 1)^a$

Et on a : $d\beta - 1 \equiv -1[d]$ Donc $(d\beta - 1)^a \equiv (-1)^a[d]$

et puisque a est impair on a $(d\beta - 1)^a \equiv -1[d]$

Par suite : $2^{ab} \equiv -1[d]$

2) $d \in \{1; 2\}$???

on a : $2^{ab} \equiv 1[d]$ et $2^{ab} \equiv -1[d]$ donc $0 \equiv 2[d]$

donc $d/2$ et on a $d \in \mathbb{N}^*$ donc $d \in \{1; 2\}$

3) montrons que $d = 1$

On a : $2^a - 1$ et $2^b - 1$ sont impairs donc d est impair

Et puisque $d \in \{1; 2\}$ donc $d = 1$

Exercice32 :

1) a) montrer que : $2^{4k+r} \equiv 2^r [5] \forall (k; r) \in \mathbb{N}^2$

b) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 5 du nombres 2^n

2) montrer que $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^*$

3) montrer que $\frac{5}{1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006}}$

Solution33 : 1) a) on a : $2^4 \equiv 1[5]$ donc

$(2^4)^k \equiv 1^k [5]$ donc $2^{4k} \equiv 1[5]$ donc $2^{4k} \times 2^r \equiv 2^r [5]$

Donc $2^{4k+r} \equiv 2^r [5] \forall (k; r) \in \mathbb{N}^2$

b) $2^n \equiv r[5]$ et $r \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 4k + r$ avec $r \in \{0; 1; 2; 3\}$

donc : $2^{4k} \equiv 1[5]$ et $2^{4k+1} \equiv 2[5]$ et $2^{4k+2} \equiv 4[5]$

et $2^{4k+3} \equiv 3[5]$

2) montrons que $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^*$?

on a : $17 \equiv 2[5]$ donc : $17^{4p+2} \equiv 2^{4p+2} [5]$

$32^{4p+3} \equiv -2^{4p+3} [5]$ $17^{4p+2} \equiv 4[5]$

on a : $32 \equiv 2[5]$ donc : $32^{4p+3} \equiv 2^{4p+3} [5]$

donc : $32^{4p+3} \equiv 3[5]$ donc $32^{4p+3} \equiv 2[5]$

donc $17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3 \equiv 4 + 3 + 3[5]$

donc $17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3 \equiv 0[5]$

donc $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^*$

3)

on a : $1 \equiv 1[5]$ et $2 \equiv 2[5]$ et $3 \equiv -2[5]$ et $4 \equiv -1[5]$

donc : $1^{2006} \equiv 1^{2006} [5]$ et $2^{2006} \equiv 2^{2006} [5]$ et

$3^{2006} \equiv (-2)^{2006} [5]$ et $4^{2006} \equiv (-1)^{2006} [5]$

donc ; $1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 2 \times 2^{2006} [5]$

$1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 2^{2007} [5]$

Or : $2007 = 4 \times 501 + 3$ donc : $2^{2007} \equiv 3[5]$

Donc : $1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 3[5] \equiv 0[5]$

Exercice34 : déterminer le chiffre des unités

des nombres suivants : 1) $2019^{2020^{2021}}$ 2) $1987^{1991^{1983}}$

Solution34 :1) on a : $2019 \equiv -1[10]$ donc

$$2019^{2020^{2021}} \equiv (-1)^{2020^{2021}} [10] \text{ et puisque } 2020^{2021}$$

$$\text{Est paire donc : } 2019^{2020^{2021}} \equiv 1[10]$$

le chiffre des unités est 1

$$2) \text{ on a : } 1987 \equiv 7[10] \text{ donc } 1987^2 \equiv 9[10]$$

$$\text{Et } 1987^3 \equiv 3[10] \text{ et } 1987^4 \equiv 1[10]$$

$$\text{Donc : } 1987^{4k} \equiv 1[10] \text{ et } 1987^{4k+1} \equiv 7[10] \text{ et}$$

$$1987^{4k+2} \equiv 9[10] \text{ et } 1987^{4k+3} \equiv 3[10]$$

$$1991^{1983} \equiv ?[4]$$

$$1991 \equiv 3[4] \text{ et } 1991^2 \equiv 1[4]$$

$$\text{on a : } 1983 \equiv 1[2] \text{ donc : } 1991^{1983} \equiv 3[4]$$

$$\text{donc : } 1987^{1991^{1983}} \equiv 3[10]$$

Le chiffre des unités est 3

Exercice35 : soit $N = \overline{dcba}$ un entier naturel

montrer que : $N \equiv a - b + c - d [11]$

Solution35 : on a :

$$N = \overline{dcba} = a + b \times 10 + c \times 10^2 + d \times 10^3$$

$$\text{et on a : } 10 \equiv -1[11] \text{ et } 10^2 \equiv 1[11] \text{ et } 10^3 \equiv -1[11]$$

$$\text{Donc : } N \equiv a - b + c - d [11]$$

Exercice36 :

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer :

$$67 \wedge 39$$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel

$$\text{que : } 39u + 67v = 1$$

Solution36 :1)

$$(1) 67 = 1 \times 39 + \boxed{28} \quad (2) 39 = 1 \times 28 + \boxed{11}$$

$$(3) 28 = 2 \times 11 + \boxed{6} \quad (4) 11 = 1 \times 6 + \boxed{5}$$

$$(5) 6 = 1 \times 5 + \boxed{1} \quad (6) 5 = 1 \times 5 + \boxed{0}$$

Donc : $67 \wedge 39 = 1$ c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

$$2) (5) 6 = 1 \times 5 + \boxed{1} \Rightarrow 6 - 1 \times 5 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow 6 - 1 \times (11 - 1 \times 6) = \boxed{1} \Rightarrow 2 \times 6 - 1 \times 11 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow 2 \times (28 - 2 \times 11) - 1 \times 11 = \boxed{1} \Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times 11 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times (39 - 1 \times 28) = \boxed{1} \Rightarrow 7 \times 28 - 5 \times 39 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow 7 \times (67 - 1 \times 39) - 5 \times 39 = \boxed{1} \Rightarrow \boxed{7 \times 67 - 12 \times 39 = 1}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien





Exercices avec solutions

Exercice01 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

12) Déterminer dans $\mathbb{Z}$ tous les diviseurs de -8

Solution01 : 1) 156 a 12 diviseurs :

1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.

156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.

2) $D_{-8} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

Exercice02 :

1) $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$

a) montrer que si $\frac{a}{2b+c}$ et $\frac{a}{b+c}$ alors $\frac{a}{c}$

b) montrer que si $\frac{a}{2b+3c}$ et $\frac{a}{b+c}$ alors $\frac{a}{c}$

c) montrer que si $\frac{a}{x-y}$ et $\frac{a}{b-c}$ alors $\frac{a}{xb-cy}$

2) $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $\frac{a}{12n+1}$ et $\frac{a}{-2n+3}$

Montrer que $\frac{a}{19}$

3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et $\frac{d}{n^2+3}$ et $\frac{d}{2n-1}$

Montrer que $\frac{d}{13}$

Solution02 : 1) a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{2b+c} \Rightarrow \frac{a}{2(b+c)-(2b+c)} \Rightarrow \frac{a}{c} \\ \frac{a}{b+c} \end{array} \right.$$

$$1) b) \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{2b+3c} \Rightarrow \frac{a}{2b+3c-2(b+c)} \Rightarrow \frac{a}{c} \\ \frac{a}{b+c} \end{array} \right.$$

$$1) c) \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{x-y} \Rightarrow \frac{a}{bx-by} \text{ et } \frac{a}{by-cy} \Rightarrow \frac{a}{bx-cy} \\ \frac{a}{b-c} \end{array} \right.$$

$$2) \frac{a}{12n+1} \text{ et } \frac{a}{-2n+3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{12n+1} \text{ et } \frac{a}{-12n+18} \Rightarrow \frac{a}{19}$$

$$\Rightarrow a \in \{\pm 1; \pm 19\}$$

$$3) d \in \mathbb{Z} \text{ et } a \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{d}{n^2+3} \text{ et } \frac{d}{2n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{n^2+3} \text{ et } \frac{d}{(2n-1)^2} \Rightarrow \frac{d}{4n^2+12} \text{ et } \frac{d}{4n^2-4n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{11+4n} \text{ et } \frac{d}{-2+4n} \Rightarrow \frac{d}{13}$$

Exercice03 : $a \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$

$$\text{Montrer que : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{5x-7} \Rightarrow \frac{a}{29} \\ \frac{a}{2x+3} \end{array} \right.$$

$$\text{Solution03 : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{5x-7} \Rightarrow \frac{a}{2(5x-7)-5(2x+3)} \\ \frac{a}{2x+3} \end{array} \right.$$

$$\frac{a}{10x-14-10x-15} \Rightarrow \frac{a}{-29} \Rightarrow \frac{a}{29}$$

Exercice04 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$:

3 divise $4^n - 1$

Solution04 :

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$

1étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons

$4^0 - 1 = 0$ est un multiple de 3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit

vraie c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$ donc

$$4^n = 3k + 1$$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est

vraie. Montrons alors que :

$$\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} - 1 = 3k' \quad ??$$

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1$$

$$= 4 \times (3k + 1) - 1 = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$$

$$\text{avec } k' = 4k + 1$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}; 4^n - 1$ est divisible par 9

Exercice05 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n + 2/3n + 1$

Solution05 : $n + 2/3n + 1$ et $n + 2/3n + 2$

$n + 2/3n + 1$ et $n + 2/3n + 6$ donc

$$n + 2/(3n + 6) - (3n + 1) \text{ donc } n + 2/5$$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5

Il faut que $n + 2 \in \{-1; -5; 1; 5\}$ ce qui entraîne que

$$n \in \{-3; -7; -1; 3\}$$

On vérifie que si $n \in \{-3; -7; -1; 3\}$ alors

$n + 2/3n + 1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n + 2/3n + 1$ sont : -7 ; -3 ; -1 ; 3

Exercice 06 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Solution06 : Cette fraction a un sens si : $n+4 \neq 0$, soit $n \neq -4$

On constate que $3n+8 = 3(n+4) - 4$

$n+4$ divise $3(n+4)$, donc $n+4$ divise $3n+8$ si

$n+4$ divise -4 .

Les diviseurs de -4 sont $1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4$.

Il faut que $n+4 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ ce qui entraîne

que $n \in \{-8; -6; -5; -3; -2; 0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à $-8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0$ avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un entier

relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : $-8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0$.

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes : a) $x^2 - y^2 = 32$ avec $x > y$

b) $2xy + 2x + y = 99$

Solution07 : a) $x^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 32$

$x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs positifs de 32

Et $(x-y) + (x+y) = 2x$ est un nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité $32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$S = \{(6; 2); (9; 7)\}$

b) $2xy + 2x + y = 99 \Leftrightarrow 2xy + y + 2x + 1 - 1 = 99$

$\Leftrightarrow y(2x+1) + 2x+1 = 99+1 \Leftrightarrow (2x+1)(y+1) = 100$

Donc : $2x+1$ et $y+1$ sont des diviseurs positifs de 100

$D_{100} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$

$2x+1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$S = \{(0; 99); (2; 19); (12; 3)\}$

Exercice08 : Déterminer les restes dans la division par 9 des nombres suivants : 23451^{100} ; 100^{23451} ; $23451^{100} + 100^{23451}$

Solution08 : On a : $23451 = 3908 \times 9 + 6$

donc : $23451 \equiv 6[9]$

donc : $23451 \equiv 6^{100}[9]$

et on a : $6 = 6[9]$ donc $6^2 = 36[9] \Leftrightarrow 6^2 \equiv 0[9]$

donc : $(6^2)^{50} \equiv 0[9]$ donc : $6^{100} \equiv 0[9]$

donc : $23451^{100} \equiv 0[9]$ **(1)**

donc le reste dans la division du nombre 23451^{100} par 9 est : 0 (cad 23451^{100} est divisible par 9 ou on dit que 9 divise 23451^{100})

de même on a : $100 = 11 \times 9 + 1$ donc : $100 \equiv 1[9]$

$\Rightarrow 100^{23451} = 1^{23451}[9] \Rightarrow 100^{23451} \equiv 1[9]$ **(2)**

De **(1) et (2)** on déduit que :

$23451^{100} + 100^{23451} \equiv 0 + 1[9]$ car la congruence est compatible avec l'addition

Donc : $23451^{100} + 100^{23451} \equiv 1[9]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $23451^{100} + 100^{23451}$ par 9 est : 1

Exercice09 : 1) Montrer que : $5^8 \equiv -1[17]$

2) Déterminer les restes dans la division par 17 des nombres suivants : 5^{16} ; 5^{500} .

Solution09 : 1) On a : $5^1 \equiv 5[17]$ donc

$5^2 \equiv 25[17] \Leftrightarrow 5^2 \equiv 8[17]$

$5^4 \equiv 8^2[17] \Leftrightarrow 5^4 \equiv 13[17]$

$5^8 \equiv 13^2[17] \Leftrightarrow 5^8 \equiv 169[17] \Leftrightarrow 5^8 \equiv 16[17] \Leftrightarrow 5^8 \equiv -1[17]$

2) On a : $5^8 \equiv -1[17]$ donc

$(5^8)^2 \equiv (-1)^2[17] \Leftrightarrow 5^{16} \equiv 1[17]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 5^{16} par 17 est : 1

On a : $500 = 31 \times 16 + 4$

Donc : $5^{500} \equiv 5^{31 \times 16 + 4}[17] \Leftrightarrow 5^{500} \equiv (5^{16})^{31} \times 5^4[17]$

$\Leftrightarrow 5^{500} \equiv 1^{31} \times 5^4[17] \Leftrightarrow 5^{500} \equiv 5^4[17] \Leftrightarrow 5^{500} \equiv 13[17]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 5^{500} par 17 est : 13

Exercice10 : $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19

Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

1) $a+b$ 2) a^2+b^2 3) $2a-5b$

Solution10 : 1) On a : $a \equiv 17[19]$ et $b \equiv 15[19]$

donc : $a+b \equiv 17+15[19] \Leftrightarrow a+b \equiv 13[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a+b$ par 19 est : 13

2) $a \equiv 17[19] \Rightarrow a^2 \equiv 17^2[19] \Rightarrow a^2 \equiv 4[19]$

$b \equiv 15[19] \Rightarrow b^2 \equiv 15^2[19] \Rightarrow b^2 \equiv 16[19]$

Donc : $a^2 + b^2 \equiv 4 + 16[19] \Leftrightarrow a^2 + b^2 \equiv 1[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a^2 + b^2$ Par 19 est : 1

3) $a \equiv 17[19] \Rightarrow 2a \equiv 2 \times 17[19] \Rightarrow 2a \equiv 15[19]$ **(1)**

$b \equiv 15[19] \Rightarrow 5b \equiv 5 \times 15[19] \Rightarrow 5b \equiv 18[19]$

Donc : $5b \equiv -1[19] \Rightarrow -5b \equiv 1[19]$ **(2)**

De **(1)** et **(2)** on déduit que :

$2a - 5b \equiv 15 + 1[19] \Rightarrow 2a - 5b \equiv 16[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $2a - 5b$ Par 19 est : 16

Exercice11 : Déterminer le reste de la division du nombre 3^{2007} par 2 et par 13

Solution11 : 1) On a : $3 \equiv 1[2]$ donc $3^{2007} \equiv 1[2]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 3^{2007} Par 2 est : 1

2) On a : $3 \equiv 3[13]$ donc

$3^2 \equiv 9[13] \Rightarrow 3^3 \equiv 27[13] \Rightarrow 3^3 \equiv 1[13]$

Et on a : $2007 = 3 \times 669$ donc :

$(3^3)^{669} \equiv 1^{669}[13] \Rightarrow 3^{2007} \equiv 1[13]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 3^{2007} Par 13 est : 1

Exercice12 : Déterminer le reste de la division du nombre 73^{2019} par 7

Solution12 : On a : $73 \equiv 3[7]$ donc $73^{2019} \equiv 3^{2019}[7]$

$3^{2019} = 3^{2018+1} = 3^{2 \times 1009 + 1} = (3^2)^{1009} \times 3^1$

On a : $3^2 \equiv 2[7]$ donc : $(3^2)^{1009} \equiv 2^{1009}[7]$

donc : $3^{2019} \equiv 2^{1009} \times 3[7]$

on a : $1009 = 336 \times 3 + 1$

donc : $2^{2019} = (2^3)^{336} \times 2$ et on a : $2^3 \equiv 1[7]$

donc : $(2^3)^{336} \times 2 \equiv 2[7]$ par suite : $73^{2019} \equiv 6[7]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 73^{2019} Par 7 est : 6

Exercice13 : Déterminer le reste de la division du nombre $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

Solution13 : On a : $19 \equiv 5[7]$ donc $19^2 \equiv 4[7]$

donc $19^4 \equiv 2[7]$ et on a $52 = 13 \times 4$ donc :

$19^{52} \equiv 2^{13}[7]$

On a : $23 \equiv 2[7]$ donc $23^{41} \equiv 2^{41}[7]$

$19^{52} \times 23^{41} \equiv 2^{54}[7]$ ($542 = 3 \times 18$)

On a : $2^3 \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{54} \equiv 1[7]$

donc : $19^{52} \times 23^{41} \equiv 1[7]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $19^{52} \times 23^{41}$ Par 7 est : 1

Exercice14 : Déterminer le reste de la division par 5 du nombre $22^{33} + 33^{22}$

Solution14 : On a : $22 \equiv 2[5]$ donc $22^{33} \equiv 2^{33}[5]$

Et on a : $33 \equiv -2[5]$ donc $33^{22} \equiv 2^{22}[5]$

donc $22^{33} + 33^{22} \equiv 2^{33} + 2^{22}[5]$

et on a $2^4 \equiv 1[5]$ et $33 = 8 \times 4 + 1$ donc :

$2^{33} = 2^{8 \times 4 + 1} = (2^4)^8 \times 2^1$ donc $2^{33} \equiv 2[5]$

on a $2^{22} = (2^2)^{11}$ et $2^2 \equiv -1[5]$ donc $2^{22} \equiv -1[5]$

donc $22^{33} + 33^{22} \equiv 2 - 1[5]$

donc : $22^{33} + 33^{22} \equiv 1[5]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $22^{33} + 33^{22}$ Par 5 est : 1

Exercice15 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ 3 divise $4^n - 1$

Solution15 : Méthode1

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$

1 étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons

$4^0 - 1 = 0$ est un multiple de 3

Donc P (0) est vraie.

2 étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit

vraie c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$ donc

$4^n = 3k + 1$

3 étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} - 1 = 3k' \quad ??$

$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1$

$= 4 \times (3k + 1) - 1 = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$

avec $k' = 4k + 1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}; 4^n - 1$ est divisible par 9

Méthode2

Il suffit de montrer que : $4^n - 1 \equiv 0[3] \quad ??$

On a : $4 \equiv 1[3]$ donc $4^n \equiv 1[3]$

Donc : $4^n - 1 \equiv 0[3]$ Cqfd

Exercice16 : 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 7 du nombre 3^n

2) en déduire le reste de la division par 7 du nombre 2019^{2019}

Solution19 : 1) $3^n \equiv r[7]$ et $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

On a : $3^0 \equiv 1[7]$ et $3^1 \equiv 3[7]$ et $3^2 \equiv 2[7]$
et $3^3 \equiv 6[7]$ et $3^4 \equiv 4[7]$ et $3^5 \equiv 5[7]$ et $3^6 \equiv 1[7]$
Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 6k + r$ avec $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
On a : $3^6 \equiv 1[7]$ donc : $(3^6)^k \equiv 1^k[7]$
donc : $3^{6k} \equiv 1[7]$ et $3^{6k+1} \equiv 3[7]$ et $3^{6k+2} \equiv 2[7]$
et $3^{6k+3} \equiv 6[7]$ et $3^{6k+4} \equiv 4[7]$ et $3^{6k+5} \equiv 5[7]$

Exercice17: Résoudre les équations
suivantes dans $\mathbb{Z}/_4\mathbb{Z}$: 1) $\bar{2}x = \bar{3}$ 2) $x^2 + \bar{3}x = \bar{0}$
3) $\bar{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Solution10 : On a : $\mathbb{Z}/_4\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}\}$

1) On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que

Cette équation n'admet pas de solutions Donc : $S = \emptyset$

1) On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$x^2 + \bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont solutions de l'équation Donc : $S = \{\bar{0}; \bar{1}\}$

2) $\bar{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k} \Leftrightarrow \bar{1}x^3 + \bar{2}x = \bar{k} \Leftrightarrow x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Car : $2013 = 503 \times 4 + 1$

On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^3	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$x^3 + \bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Si $\bar{k} = \bar{0}$: $S = \{\bar{0}; \bar{2}\}$ Si $\bar{k} = \bar{1}$: $S = \{\bar{3}\}$

Si $\bar{k} = \bar{2}$: $S = \emptyset$ Si $\bar{k} = \bar{3}$: $S = \{\bar{1}\}$

Exercice18 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/_5\mathbb{Z})^2$ l'équations

suivants : $x + \bar{3}y = \bar{1}$

Solution18 : on Dresse une table des opérations
de $\mathbb{Z}/_5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$ Comme suite

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

$$S = \{(\bar{0}; \bar{2}); (\bar{1}; \bar{0}); (\bar{2}; \bar{3}); (\bar{3}; \bar{1}); (\bar{4}; \bar{3}); (\bar{4}; \bar{4})\}$$

Exercice19 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/_5\mathbb{Z})^2$ les système

$$\text{suivants : } \begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

Solution19 :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{3} + \bar{2})x + (\bar{2} + \bar{4})y = \bar{3} + \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \bar{4} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{1} \\ y = \bar{4} \end{cases} \text{ donc } S = \{(\bar{1}; \bar{4})\}$$

Exercice20 : 1) Déterminer et discuter suivants
les valeurs de l'entier naturel n le reste de la
division par 10 du nombres 3^n

2) en déduire le chiffre des unités du nombres
 2019^{2020}

3) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n
tél que : $3^n + 5n + 2 \equiv 0[10]$

Solution20 : 1) $3^n \equiv r[10]$ et $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

On a : $3^0 \equiv 1[10]$ et $3^1 \equiv 3[10]$ et $3^2 \equiv 9[10]$

et $3^3 \equiv 7[10]$ et $3^4 \equiv 1[10]$

Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 4k + r$ avec $r \in \{0; 1; 2; 3\}$

On a : $3^4 \equiv 1[10]$ donc : $(3^4)^k \equiv 1^k[10]$

donc : $3^{4k} \equiv 1[10]$ et $3^{4k+1} \equiv 3[10]$ et $3^{4k+2} \equiv 9[10]$

et $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

2) le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est
le reste dans la division du nombre 2019^{2020} Par
10

cad : on cherche r tel que : $2019^{2020} \equiv r[10]$??

On a : $2019 = 2010 + 9$ donc : $2019 \equiv 9[10]$

donc : $2019^{2020} \equiv 9^{2020}[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 3^{4040}[10]$

or : $4040 = 4 \times 1010 = 4 \times k$

donc : $2019^{2020} \equiv 3^{4k}[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 1[10]$

le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est 1
Autre méthode : $2019 \equiv 9[10]$

donc : $2019 \equiv -1[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 1[10]$

3) On Dresse une table comme suite :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
3^n	$\equiv 1[10]$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 9[10]$	$\equiv 7[10]$
$5n$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$
$3^n + 5n + 2$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 1[10]$	$\equiv 4[10]$

donc : $3^n + 5n + 2 \equiv 0[10] \Leftrightarrow n = 3k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice21 : Déterminer le chiffre des unités du nombre 24537^{2018}

Solution21 : On a : $24537 \equiv 7[10]$ donc :

$24537^{2018} \equiv 7^{2018}[10]$ or : $7^2 \equiv -1[10]$ donc :

$$(7^2)^{1009} \equiv (-1)^{1009}[10] \equiv -1[10]$$

Donc : $24537^{2018} \equiv -1[10]$ donc : $24537^{2018} \equiv 9[10]$

Donc : des unités du nombre 24537^{2018} est 9

Exercice22 : Déterminer tous les entiers naturels n tel que : $2^n \equiv n^2[9]$

Solution22 : on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}; \bar{7}; \bar{8}\}$ Comme suite

$\bar{n}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
2^n	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{n}^2$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

$$2^n \equiv n^2[9] \Leftrightarrow \bar{n} = \bar{2} \text{ ou } \bar{n} = \bar{4}$$

$$2^n \equiv n^2[9] \Leftrightarrow n = 2 + 9k \text{ ou } n = 4 + 9k \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

Exercice23 : Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation suivante : $3^n + 5n + 1 \equiv 0[8]$

Solution23 : methode1 :

on Dresse une table des opérations de

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}; \bar{7}\}$ Comme suite

On a : $3^0 \equiv 1[8]$ et $3^1 \equiv 3[8]$ et $3^2 \equiv 1[8]$

donc : $3^{2k} \equiv 1[8]$ et $3^{2k+1} \equiv 3[8]$

$\bar{n}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
3^n	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$5n+1$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$
U_n	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$

$$3^n + 5n + 1 \equiv 0[8] \Leftrightarrow \bar{n} = \bar{6}$$

$$3^n + 5n + 1 \equiv 0[8] \Leftrightarrow n = 6 + 8k \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

Exercice24 : Quel est le reste de la division du nombre $22^{33} \times 33^{22}$ par 5?

Solution24 : On a : $22 \equiv 2[5]$ donc $22^{33} \equiv 2^{33}[5]$

Et on a : $33 \equiv -2[5]$ donc $33^{22} \equiv 2^{22}[5]$

donc $22^{33} \times 33^{22} \equiv 2^{33} \times 2^{22}[5]$ donc $22^{33} \times 33^{22} \equiv 2^{55}[5]$

et on a $2^4 \equiv 1[5]$ et $55 = 13 \times 4 + 3$ donc :

$$2^{55} = 2^{13 \times 4 + 3} = (2^4)^{13} \times 2^3 \text{ donc } 2^{55} \equiv 8[5] \text{ donc}$$

$2^{55} \equiv 3[5]$ Par suite : le reste dans la division du nombre $22^{33} \times 33^{22}$ Par 5 est : 3

Exercice25 : Quel est le reste de la division du

nombre 3^{2019} par 2 et par 13?

Solution25 : 1) On a : $3 \equiv 1[2]$ donc $3^{2019} \equiv 1[2]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 3^{2019} Par 2 est : 1

2) On a : $3 \equiv 3[13]$ donc

$$3^2 \equiv 9[13] \Rightarrow 3^3 \equiv 27[13] \Rightarrow 3^3 \equiv 1[13]$$

Et on a : $2019 = 3 \times 673$ donc :

$$(3^3)^{673} \equiv 1^{673}[13] \Rightarrow 3^{2019} \equiv 1[13]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre 3^{2019} Par 13 est : 1

Exercice26 : 1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$2^{2n} + 6n - 1$$

Est divisible par 9

2) En déduire que : $4^n \equiv 3n + 1[9]$

Solution26 : 1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\exists k \in \mathbb{N} / 2^{2n} + 6n - 1 = 9k$$

1étapes : l'initialisation : Pour $n=1$ nous avons

$$2^{2 \times 1} + 6 \times 1 - 1 = 9 \text{ est un multiple de 9}$$

Donc P (1) est vraie.

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 2^{2n} + 6n - 1 = 9k$ donc $2^{2n} = 9k - 6n + 1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$$\exists k' \in \mathbb{N} / 2^{2(n+1)} + 6(n+1) - 1 = 9k' ??$$

$$2^{2(n+1)} + 6(n+1) - 1 = 2^{2n} \times 2^2 + 6n + 6 - 1$$

$$= (9k - 6n + 1) \times 4 + 6n + 5 = 9 \times 4k - 24n + 4 + 6n + 5$$

$$= 9 \times 4k - 18n + 9 = 9 \times (4k - 2n + 1) = 9 \times k'$$

avec $k' = 4k - 2n + 1$ donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{2n} + 6n - 1 \text{ Est divisible par 9}$$

$$2) \text{ on a : } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{9}{2^{2n} + 6n - 1}$$

$$\text{Donc : } 2^{2n} + 6n - 1 \equiv 0[9] \text{ Donc : } (2^2)^n \equiv -6n + 1[9]$$

$$\text{et on a : } 0 \equiv 9n[9] \text{ donc : } 4^n \equiv 3n + 1[9]$$

Exercice27 : Quel est le reste de la division du nombre $1653^{351} + 43^{137}$ par 11?

Solution27 : On a : $1653 = 150 \times 11 + 3$

$$1653 \equiv 3[11] \text{ et } 43 \equiv -1[11] \text{ donc } (1653)^{351} \equiv 3^{351}[11]$$

$$43^{137} \equiv (-1)^{137}[11] \text{ donc : } 43^{137} \equiv -1[11]$$

$$\text{On a : } 351 = 70 \times 5 + 1$$

$$\text{donc } (1653)^{351} \equiv 3^{351}[11] \equiv (3^5)^{70} \times 3[11] \equiv 1 \times 3[11] \equiv 3[11]$$

$$\text{donc } 1653^{351} + 43^{137} \equiv 2[11]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre $1653^{351} + 43^{137}$ Par 11 est : 2

Exercice28: $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = 4^n - 3n - 1$

1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$ divise $4^n - 3n - 1$

Solution28 :

$$1) U_{n+1} = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1 = 4^n \times 4 - 3n - 4$$

$$\text{Or : } U_n = 4^n - 3n - 1 \Leftrightarrow U_n + 3n + 1 = 4^n$$

$$\text{Donc : } U_{n+1} = (U_n + 3n + 1) \times 4 - 3n - 4 = 4U_n + 12n + 4 - 3n - 4$$

$$U_{n+1} = 4U_n + 9n$$

2) (récurrence)

1étapes : Pour $n=0$ nous avons $\frac{9}{0}$

Donc P (0) est vraie.

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\frac{9}{4^n - 3n - 1}$ donc $\frac{9}{U_n}$

3étapes : Montrons que : $\frac{9}{U_{n+1}}$??

$$\text{On a } \frac{9}{U_n} \text{ et } \frac{9}{9} \text{ donc } \frac{9}{4U_n + 9n} \text{ donc } \frac{9}{U_{n+1}}$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 9 \text{ divise } 4^n - 3n - 1$$

Exercice29 :montrer que

$$\frac{7}{1^{2019}} + 2^{2019} + 3^{2019} + 4^{2019} + 5^{2019} + 6^{2019}$$

Solution29 :on a : $4 \equiv -3[7]$ et $5 \equiv -2[7]$ et

$$6 \equiv -1[7] \text{ donc : } 4^{2019} \equiv -3^{2019}[7] \text{ et } 5^{2019} \equiv -2^{2019}[7]$$

$$\text{et } 6^{2019} \equiv -1^{2019}[7]$$

$$\text{donc : } 1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019} + 4^{2019} + 5^{2019} + 6^{2019} \equiv 1 + (-1)[7]$$

$$\text{Donc : } 1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019} + 4^{2019} + 5^{2019} + 6^{2019} \equiv 0[7]$$

Exercice30 : $n \in \mathbb{N}$ on pose $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$

1)montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 3n + 4$ et $n^2 - 3n + 4$ Sont des nombres pairs

2) En déduire que $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$ n'est pas premier

Solution30 :1)soit $n \in \mathbb{Z} \quad n^2 - 3n + 4 \equiv n^2 - n[2]$

donc $n^2 - 3n + 4 \equiv n(n-1)[2]$ or $n(n-1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc paire donc $n(n-1) \equiv 0[2]$ donc $n^2 - 3n + 4 \equiv 0[2]$

donc $n^2 - 3n + 4$ est un nombre paire

et on a : $n^2 + 3n + 4 \equiv n^2 + n[2]$ donc

$$n^2 + 3n + 4 \equiv n(n+1)[2]$$

Or $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc paire

$$\text{donc } n(n+1) \equiv 0[2] \text{ donc } n^2 + 3n + 4 \equiv 0[2]$$

donc $n^2 + 3n + 4$ est un nombre paire

$$2) \alpha_n = n^4 - n^2 + 16 = (n^2 + 4)^2 - 9n^2 = (n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4)$$

Et puisque $n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4$ sont des nombres paire

alors : $n^2 - 3n + 4 \neq 1$ et $n^2 + 3n + 4 \neq 1$

donc α_n n'est pas un nombre premier

Exercice31 : montrer que $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \wedge (a+1) = 1$

Solution31 : on pose $d = a \wedge (a+1)$

$$\Rightarrow \frac{d}{a} \text{ et } \frac{d}{a+1} \Rightarrow \frac{d}{1} \Rightarrow d = 1$$

Exercice32 : $n \in \mathbb{N}$ On considère les deux

nombre : $A = n^2 + 3$ et $B = n + 2$

1) montrer que $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N}$

Solution32 :1)on pose $d = A \wedge B$ et

$$d' = (n+2) \wedge 7$$

On a : $d = A \wedge B$

$$\Rightarrow \frac{d}{A} \text{ et } \frac{d}{B} \Rightarrow \frac{d}{n^2+3} \text{ et } \frac{d}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{n^2+3} \text{ et } \frac{d}{n+2} \text{ on utilisant la division euclidienne : on trouve : } n^2 + 3 = (n+2)(n-2) + 7$$

$$n^2 + 3 - (n+2)(n-2) = 7$$

$$\Rightarrow \frac{d}{n^2+3 - (n+2)(n-2)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{7} \text{ et } \frac{d}{n+2} \Rightarrow \frac{d}{(n+2) \wedge 7} \Rightarrow \frac{d}{d'}$$

Inversement : On a : $d' = (n+2) \wedge 7$

$$\Rightarrow \frac{d'}{n+2} \text{ et } \frac{d'}{7} \Rightarrow \frac{d'}{(n+2)(n-2)} \text{ et } \frac{d'}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{d'}{(n+2)(n-2) + 7} \text{ et } \frac{d'}{7} \Rightarrow \frac{d'}{n^2+3} \text{ et } \frac{d'}{7}$$

$$\text{donc : } \frac{d'}{A \wedge B} \text{ donc } \frac{d'}{d}$$

$$\text{donc } \frac{d'}{d'} \text{ et } \frac{d'}{d} \text{ et } d \in \mathbb{N} \text{ et } d' \in \mathbb{N} \text{ donc}$$

$$\text{donc } d = d' \text{ donc : } A \wedge B = (n+2) \wedge 7$$

$$2) \frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{n^2+3}{n^2+3} \text{ et on a : } \frac{n^2+3}{n+2}$$

$$\text{Donc : } \frac{n^2+3}{A \wedge B} \text{ Donc : } \frac{n^2+3}{(n+2) \wedge 7}$$

$$\text{Donc : } \frac{n^2+3}{7} \text{ or } 7 \text{ est premier donc :}$$

Il faut que $n+2 \in \{1; 7\}$ ce qui entraîne que $n=5$

Exercice33: $a=(25^n-1)(36^n-1)$ et $b=(5^n-1)(6^n-1)$

Calculer les $a \vee b$ ($n \in \mathbb{N}$)

Solution33 :

$$a = ((5^n)^2 - 1)((6^n)^2 - 1) = (5^n - 1)(5^n + 1)(6^n - 1)(6^n + 1)$$

$$a = b(5^n + 1)(6^n + 1) \text{ donc : } \frac{b}{a} \text{ donc : } a \vee b = a$$

Exercice34 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations

suivantes : a) $x^2 - y^2 = 32$ avec $x \succ y$

b) $2xy + 2x + y = 99$

Solution34 : a) $x^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 32$

$x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs positifs de 32

Et $(x-y) + (x+y) = 2x$ est un nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité $32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$$S = \{(6; 2); (9; 7)\}$$

b) $2xy + 2x + y = 99 \Leftrightarrow 2xy + y + 2x + 1 - 1 = 99$

$$\Leftrightarrow y(2x+1) + 2x+1 = 99+1 \Leftrightarrow (2x+1)(y+1) = 100$$

Donc : $2x+1$ et $y+1$ sont des diviseurs positifs de 100

$$D_{100} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$$

$2x+1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$$S = \{(0; 99); (2; 19); (12; 3)\}$$

Exercice35 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$

Solution35 : $n+2/3n+1$ et $n+2/n+2$

$n+2/3n+1$ et $n+2/3n+6$ donc

$n+2/(3n+6) - (3n+1)$ donc $n+2/5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5

Il faut que $n+2 \in \{-1; -5; 1; 5\}$ ce qui entraîne que

$$n \in \{-3; -7; -1; 3\}$$

On vérifie que si $n \in \{-3; -7; -1; 3\}$ alors

$n+2/3n+1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$ sont : -7 ; -3 ; -1 ; 3

Exercice 36 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Solution36 : Cette fraction a un sens si $n+4 \neq 0$, soit $n \neq -4$

On constate que $3n+8 = 3(n+4) - 4$

$n+4$ divise $3(n+4)$, donc $n+4$ divise $3n+8$ si

$n+4$ divise -4.

Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.

Il faut que $n+4 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ ce qui entraîne

que $n \in \{-8; -6; -5; -3; -2; 0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un entier

relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0.

Exercice37 : déterminer : $d = (-8316) \wedge 1080$

et $m = 8316 \vee 1080$

Solution 37: la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

Donnent : $8316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11$ et

$$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$$

$$d = 8316 \wedge 1080 = 2^2 \times 3^3 = 108 \text{ et}$$

$$m = 8316 \vee 1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = 11880$$

Exercice38 : si $2 = a \wedge b$ et $-12 = a \times b$

déterminer : $a \vee b$

Solution 38: on a $a \wedge b \times (a \vee b) = |ab|$

$$\text{donc : } a \vee b = |a \times b| / a \wedge b = |-12| / 2 = 6$$

Exercice 39: n et a et b des entiers naturels
Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution39 : soit r le reste de la division

euclidienne de n par a et r' le reste de la division euclidienne de q par b on a donc :

$$n = aq + r \text{ et } 0 \leq r \leq a-1 \text{ et on a : } q = bq' + r'$$

et $0 \leq r' \leq b-1$ donc on déduit que :

$$n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$$

Et puisque : $0 \leq r' \leq b-1$ et $0 \leq r \leq a-1$ alors :

$$ar' + r \leq ab-1 \text{ donc } n = abq' + ar' + r$$

$0 \leq ar' + r \leq ab-1$ conclusion : q' est aussi le quotient de n par ab

Exercice 40: Déterminer le reste de la division euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

Solution40 : on a $19 \equiv 5[7]$ donc $19^2 \equiv 4[7]$

donc : $19^4 \equiv 2[7]$ donc $19^{52} \equiv 2^{13}[7]$

Et on a $23 \equiv 2[7]$ donc $23^{41} \equiv 2^{41}[7]$ donc

$$23^{41} \times 19^{52} \equiv 2^{13} \times 2^{41}[7]$$

$$\text{Donc : } 23^{41} \times 19^{52} \equiv 2^{54}[7]$$

$$\text{donc } 23^{41} \times 19^{52} \equiv (2^3)^{18}[7]$$

$$\text{donc } 23^{41} \times 19^{52} \equiv 8^{18}[7]$$

et puisque : $8 \equiv 1[7]$ donc $23^{41} \times 19^{52} \equiv 1[7]$

Conclusion : 1 est le reste de la division

euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

Exercice41 : 1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)^{2019} - 1 \equiv 0[n]$$

2) montrer que: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 4^{2n+2} \equiv 1[15]$

Solution41 : 1) on a : $n+1 \equiv 1[n]$ donc :

$$(n+1)^{2019} \equiv 1^{2019}[n] \text{ donc : } (n+1)^{2019} - 1 \equiv 0[n]$$

2) on a : $4^2 \equiv 1[15]$ donc : $(4^2)^{n+1} \equiv 1^{n+1}[15]$

$$\text{donc : } 4^{2n+2} \equiv 1[15]$$

Exercice42: $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = 4^n - 3n - 1$

1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9 \text{ divise } 4^n - 3n - 1$

Solution42 : 1) on a $U_{n+1} = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1$

$$\text{donc } U_{n+1} = 4 \times 4^n - 3n - 3 - 1$$

et puisque : $U_n = 4^n - 3n - 1$ donc :

$$4^n = U_n + 3n + 1 \text{ donc : } U_{n+1} = 4U_n + 9n$$

2) notons P(n) La proposition suivante :

« 9 divise U_n » . Nous allons démontrer par

récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1 étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons

$$U_0 = 4^0 - 3 \times 0 - 1 = 0 \text{ donc } 9 \text{ divise } 0 .$$

Donc P (0) est vraie.

2 étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence

: Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : « 9 divise U_n »

3 étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est

vraie. Montrons alors que : « 9 divise U_{n+1} » ??

c'est-à-dire Montrons que $U_{n+1} \equiv 0[9]$??

On a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\text{« 9 divise } U_n \text{ » donc } U_n \equiv 0[9] \text{ donc } 4U_n \equiv 0[9]$$

Et on a : $9n_n \equiv 0[9]$ donc $U_n + 9n_n \equiv 0[9]$ donc

$$U_{n+1} \equiv 0[9]$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9 \text{ divise } 4^n - 3n - 1$

Exercice43 : Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Solution43 : on Dresse une table des opérations

$$\text{de } \mathbb{Z} / 5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$$

Comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$x^2 - x - 2$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$

Et en utilisant cette une table on déduit que

$\bar{2}$ et $\bar{4}$ sont les solutions de l'équation

$$\text{Donc : } S = \{\bar{2}; \bar{4}\}$$

Exercice 44: $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$
tels que : $a = bc + d$

1) montrer que $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que : $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

Solution44 : 1) on pose $\Delta_1 = a \wedge b$ et $\Delta_2 = b \wedge d$

On a : Δ_1 / a et Δ_1 / b donc Δ_1 / a et Δ_1 / bc donc

$$\Delta_1 / a - bc \text{ donc } \Delta_1 / d$$

$$\text{donc } \Delta_1 / d \text{ et } \Delta_1 / b \text{ donc } \Delta_1 / b \wedge d \text{ donc } \Delta_1 / \Delta_2$$

inversement On a : Δ_2 / b et Δ_2 / d donc Δ_2 / d et

$$\Delta_2 / bc \text{ donc } \Delta_2 / bc + d \text{ donc } \Delta_2 / a$$

$$\text{donc } \Delta_2 / a \text{ et } \Delta_2 / b \text{ donc } \Delta_2 / a \wedge b \text{ donc } \Delta_2 / \Delta_1$$

$$\text{On a donc : } \Delta_1 / \Delta_2 \text{ et } \Delta_2 / \Delta_1 \text{ et } \Delta_1 \in \mathbb{N} \text{ et } \Delta_2 \in \mathbb{N}$$

$$\text{donc } \Delta_1 = \Delta_2$$

$$\text{donc : } a \wedge b = b \wedge d$$

2) on a : $a = bc + (a - bc)$ si on prend : $d = a - bc$ et

d'après 1) on aura : $a \wedge b = b \wedge d = b \wedge (a - bc)$

Exercice45 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux

nombre : $A = 35a + 57$ et $B = 45a + 76$

montrer que $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Solution45 : 1) on pose $d = A \wedge B$

$$\Rightarrow d / A \text{ et } d / B \Rightarrow d / 35a + 57 \text{ et } d / 45a + 76$$

$$\Rightarrow d / 9(35a + 57) \text{ et } d / 7(45a + 76)$$

$$\Rightarrow d/_{315a+513} \text{ et } d/_{315a+532}$$

$\Rightarrow d/_{19}$ or 19 est premier donc :

Il faut que $d \in \{1; 19\}$ ce qui entraine que :

$$A \wedge B = 1 \text{ ou } A \wedge B = 19$$

Exercice 46 : $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$ On considère les deux nombres : $a = 9x + 4y$ et $b = 2x + y$

1) montrer que $x \wedge y = a \wedge b$

2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$

a) montrer que $a \wedge b = b \wedge 7$

b) en déduire les valeurs possibles $a \wedge b = d$

c) montrer que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

d) en déduire les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$a \wedge b = 1$$

Solution 46 : 1) on pose $d = x \wedge y$ et $d' = a \wedge b$

montrons que : $d = d'$

$$d = x \wedge y \text{ donc : } \Rightarrow d/x \text{ et } d/y \Rightarrow d/a \text{ et } d/b$$

Car il divise toute combinaison de x et y

$$\Rightarrow d/a \wedge b \Rightarrow d/d'$$

Inversement :

$$d' = a \wedge b \Rightarrow d'/a \text{ et } d'/b \Rightarrow d'/9x+4y \text{ et } d'/2x+y$$

$$\Rightarrow d'/(9x+4y) - 4(2x+y) \text{ et } d'/9(2x+y) - 2(9x+4y)$$

$$\Rightarrow d'/x \text{ et } d'/y \Rightarrow d'/x \wedge y \Rightarrow d'/d$$

ce qui entraine: $d = d'$

2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$

a) montrons que $a \wedge b = b \wedge 7$?

la division euclidienne de $n^2 + 5n + 13$ par $n + 3$

$$\text{donne : } n^2 + 5n + 13 = (n+3)(n+2) + 7$$

$$\text{Donc : } a = b(n+2) + 7 \Leftrightarrow a - b(n+2) = 7$$

on pose $d' = b \wedge 7$ et $d = a \wedge b$

montrons que : $d = d'$

$$d = a \wedge b \Rightarrow d/a \text{ et } d/b \Rightarrow d/a - b(n+2) \text{ et } d/b$$

$$\Rightarrow d/7 \text{ et } d/b \Rightarrow d/b \wedge 7 \Rightarrow d/d'$$

$$d' = b \wedge 7 \Rightarrow d'/7 \text{ et } d'/b \Rightarrow d'/b(n+2) + 7 \text{ et } d'/b$$

$$\Rightarrow d'/a \text{ et } d'/b \Rightarrow d'/a \wedge b \Rightarrow d'/d$$

ce qui entraine: $d = d'$

b) les valeurs possibles $a \wedge b = d$??

$$\text{on a : } a \wedge b = b \wedge 7 = d$$

$$\text{donc : } d/7 \text{ donc : } d = 1 \text{ ou } d = 7$$

c) montrons que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

$$n \equiv 4[7] \Leftrightarrow n+3 \equiv 0[7] \Leftrightarrow 7/n+3 \Leftrightarrow 7/b \Leftrightarrow b \wedge 7 = 7 \Leftrightarrow b \wedge a = 7$$

d) les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$??

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow n \text{ n'est pas congrue a 0 modulo 4}$$

$$n \equiv 0[7] \text{ ou } n \equiv 1[7] \text{ ou } n \equiv 2[7] \text{ ou } n \equiv 3[7] \text{ ou } n \equiv 5[7]$$

$$\text{ou } n \equiv 6[7]$$

Exercice 47: $n \in \mathbb{Z}$

$$\text{on pose : } d_n = (2n+8) \wedge (3n+15)$$

1) montrer que $d_n/6$

2) déterminer les entiers relatifs n

tel que $d_n = 6$

Solution 47 : 1) on a $d_n = (2n+8) \wedge (3n+15)$

$$\Rightarrow d_n/_{2n+8} \text{ et } d_n/_{3n+15} \Rightarrow d_n/_{6n+24} \text{ et } d_n/_{6n+30}$$

$$\Rightarrow d_n/_{30-24} \Rightarrow d_n/6$$

$$2) 6 = (2n+8) \wedge (3n+15) \Rightarrow 6/_{2n+8} \text{ et } 6/_{3n+15}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+8 \equiv 0[6] \\ 3n+15 \equiv 0[6] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 4[6] \\ 3n \equiv 3[6] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{2}n = \bar{4} \\ \bar{3}n = \bar{3} \end{cases}$$

On Dresse une table dans

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}\}$$

Comme suite :

n	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}n$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}n$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$n = \bar{5}$ Est la solution de l'équation

$$n = \bar{5} \Leftrightarrow n = 5 + 6k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Inversement :

$$\text{Si } n = 5 + 6k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 2n+8 \equiv 0[6] \\ 3n+15 \equiv 0[6] \end{cases} \text{ donc } 6/_{2n+8} \text{ et } 6/_{3n+15}$$

$$\text{donc } 6/d_n \text{ et on a } d_n/6 \text{ donc } d_n = 6$$

Exercice 48: $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \geq 3$

et a est impair et on pose : $d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$

1) a) montrer que $2^{ab} \equiv 1[d]$

b) montrer que $2^{ab} \equiv -1[d]$

2) En déduire que : $d \in \{1; 2\}$

3) montrer que $d = 1$

Solution 48 : 1) a) montrons que $2^{ab} \equiv 1[d]$

$$\text{On a : } d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$$

Donc : $7^{4k} \equiv 1[10]$ et $7^{4k+1} \equiv 7[10]$ et $7^{4k+2} \equiv 9[10]$

$$7^{4k+3} \equiv 3[10]$$

On aussi : $7 \equiv 3[4]$ et $7^2 \equiv 1[4]$

Donc $7^{2k} \equiv 1[4]$ et $7^{2k+1} \equiv 3[4]$

Or : $7^{7^{777}} \equiv 1[2]$ (car impair)

Donc : $7^{7^{777}} \equiv 3[10]$

Exercice53 :

1)a) en déduire que : $2^{4k+r} \equiv 2^r [5] \forall (k;r) \in \mathbb{N}^2$

b) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 5 du nombres 2^n

2) montrer que $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^*$

3) montrer que $\frac{5}{1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006}}$

Solution53 : 1) a) on a : $2^4 \equiv 1[5]$ donc

$$(2^4)^k \equiv 1^k [5] \text{ donc } 2^{4k} \equiv 1[5] \text{ donc } 2^{4k} \times 2^r \equiv 2^r [5]$$

$$\text{Donc } 2^{4k+r} \equiv 2^r [5] \forall (k;r) \in \mathbb{N}^2$$

b) $2^n \equiv r[5]$ et $r \in \{0;1;2;3;4\}$

Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 4k + r$ avec $r \in \{0;1;2;3\}$

$$\text{donc : } 2^{4k} \equiv 1[5] \text{ et } 2^{4k+1} \equiv 2[5] \text{ et } 2^{4k+2} \equiv 4[5]$$

$$\text{et } 2^{4k+3} \equiv 3[5]$$

2) montrons que $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^* ?$

$$\text{on a : } 17 \equiv 2[5] \text{ donc : } 17^{4p+2} \equiv 2^{4p+2} [5]$$

$$32^{4p+3} \equiv -2^{4p+3} [5] \quad 17^{4p+2} \equiv 4[5]$$

$$\text{on a : } 32 \equiv 2[5] \text{ donc : } 32^{4p+3} \equiv 2^{4p+3} [5]$$

$$\text{donc : } 32^{4p+3} \equiv 3[5] \text{ donc } 32^{4p+3} \equiv 2[5]$$

$$\text{donc } 17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3 \equiv 4 + 3 + 3[5]$$

$$\text{donc } 17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3 \equiv 0[5]$$

$$\text{donc } \frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^*$$

3)

$$\text{on a : } 1 \equiv 1[5] \text{ et } 2 \equiv 2[5] \text{ et } 3 \equiv -2[5] \text{ et } 4 \equiv -1[5]$$

$$\text{donc : } 1^{2006} \equiv 1^{2006} [5] \text{ et } 2^{2006} \equiv 2^{2006} [5] \text{ et}$$

$$3^{2006} \equiv (-2)^{2006} [5] \text{ et } 4^{2006} \equiv (-1)^{2006} [5]$$

$$\text{donc ; } 1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 2 \times 2^{2006} [5]$$

$$1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 2^{2007} [5]$$

$$\text{Or : } 2007 = 4 \times 501 + 3 \text{ donc : } 2^{2007} \equiv 3[5]$$

$$\text{Donc : } 1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 3[5] \equiv 0[5]$$

Exercice54 : déterminer le chiffre des unités

des nombres suivants : 1) $2019^{2020^{2021}}$ 2) $1987^{1991^{1983}}$

Solution54 :

1) on a : $2019 \equiv -1[10]$ donc

$$2019^{2020^{2021}} \equiv (-1)^{2020^{2021}} [10] \text{ et puisque } 2020^{2021}$$

$$\text{Est paire donc : } 2019^{2020^{2021}} \equiv 1[10]$$

le chiffre des unités est 1

2) on a : $1987 \equiv 7[10]$ donc $1987^2 \equiv 9[10]$

$$\text{Et } 1987^3 \equiv 3[10] \text{ et } 1987^4 \equiv 1[10]$$

$$\text{Donc : } 1987^{4k} \equiv 1[10] \text{ et } 1987^{4k+1} \equiv 7[10] \text{ et}$$

$$1987^{4k+2} \equiv 9[10] \text{ et } 1987^{4k+3} \equiv 3[10]$$

$$1991^{1983} \equiv ?[4]$$

$$1991 \equiv 3[4] \text{ et } 1991^2 \equiv 1[4]$$

$$\text{on a : } 1983 \equiv 1[2] \text{ donc : } 1991^{1983} \equiv 3[4]$$

$$\text{donc : } 1987^{1991^{1983}} \equiv 3[10]$$

Le chiffre des unités est 3

Exercice55 : soit $N = \overline{dcba}$ un entier naturel

montrer que : $N \equiv a - b + c - d [11]$

Solution55 :

$$\text{on a : } N = \overline{dcba} = a + b \times 10 + c \times 10^2 + d \times 10^3$$

$$\text{et on a : } 10 \equiv -1[11] \text{ et } 10^2 \equiv 1[11] \text{ et } 10^3 \equiv -1[11]$$

$$\text{Donc : } N \equiv a - b + c - d [11]$$

Exercice56 :

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer :

$$67 \wedge 39$$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel

$$\text{que : } 39u + 67v = 1$$

Solution56 :1)

$$(1) 67 = 1 \times 39 + \boxed{28} \quad (2) 39 = 1 \times 28 + \boxed{11}$$

$$(3) 28 = 2 \times 11 + \boxed{6} \quad (4) 11 = 1 \times 6 + \boxed{5}$$

$$(5) 6 = 1 \times 5 + \boxed{1} \quad (6) 5 = 1 \times 5 + \boxed{0}$$

Donc : $67 \wedge 39 = 1$ c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

$$2) (5) 6 = 1 \times 5 + \boxed{1} \Rightarrow 6 - 1 \times 5 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow 6 - 1 \times (11 - 1 \times 6) = \boxed{1} \Rightarrow 2 \times 6 - 1 \times 11 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow 2 \times (28 - 2 \times 11) - 1 \times 11 = \boxed{1} \Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times 11 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times (39 - 1 \times 28) = \boxed{1} \Rightarrow 7 \times 28 - 5 \times 39 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow 7 \times (67 - 1 \times 39) - 5 \times 39 = \boxed{1} \Rightarrow \boxed{7 \times 67 - 12 \times 39 = 1}$$

Exercices pour le 2bac sm

Exercice57 : montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$$

Solution57 : on a : $7(3n+1) - 3(7n+2) = 1$

Donc : $\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$u(3n+1) + v(7n+2) = 1 \quad u = 7 \text{ et } v = -3$$

Donc d'après le théorème de Bézout on a :

$$(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$$

Exercice58 : montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :

$$\begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases}$$

Solution58 : $\begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n = 11x + 2 \\ n = 7y + 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 11x + 2 = 7y + 3$$

$$\Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 11x - 7y = 1 \text{ Or on sait que :}$$

$$7 \wedge 11 = 1 \text{ Donc d'après le théorème de Bézout :}$$

$$\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 / 11u + 7v = 1$$

Donc il suffit de prendre : $\begin{cases} x = u \\ y = -v \end{cases}$

$$\text{Donc } \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n = 11x + 2 \\ n = 7y + 3 \end{cases}$$

Par suite : l'ensemble des solutions du système est non vide

Exercice59 : résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : (E) $7(x-2) = 3(y+1)$

Solution59 : $7(x-2) = 3(y+1) \Leftrightarrow 7/3(y+1)$

Or on sait que : $7 \wedge 3 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss : $7/y+1$

Donc $\exists k \in \mathbb{Z} / y+1 = 7k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2) = 3(y+1) \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2) = 3 \times 7k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k + 2 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } S = \{(3k+2; 7k-1) / k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice60 : déterminer l'entier naturel n tel

$$\text{que : } \frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N}$$

Solution60 : 1) 2) $\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n(n^2+3n-2)}$

or on a : $1 = (n+1) \wedge n$ car $(n+1) - n = 1$ (bezout)

$$\text{Donc : } \frac{n+1}{n^2+8n-2}$$

La division euclidienne de $n^2 + 3n - 2$ par $n+1$

$$\text{Donne : } n^2 + 3n - 2 = (n+1)(n+2) - 4$$

$$\frac{n+1}{n^2+3n-2} \text{ et } \frac{n+1}{n+1} \Rightarrow \frac{n+1}{n^2+3n-2-(n+1)(n+2)} \\ \Rightarrow \frac{n+1}{-4} \Rightarrow \frac{n+1}{4}$$

Il faut que $n+1 \in \{1; 2; 4\}$ ce qui entraîne :

$$n \in \{0; 1; 3\}$$

Inversement : On vérifie que 0 ; 1 ; 3 vérifient

$$\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \text{ Avant de conclure que :}$$

$$\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \in \{0; 1; 3\}$$

Exercice61 : déterminer dans $\mathbb{N}^2$ les couples

$$(x; y) / \begin{cases} x + y = 48 \\ x \wedge y = 4 \end{cases} \text{ avec } x \leq y$$

$$\text{Solution61 : } \begin{cases} x + y = 48 \\ x \wedge y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / \begin{cases} x = 4x' \\ y = 4y' \\ x + y = 48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / 4x' + 4y' = 48$$

$$\Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / x' + y' = 12$$

on Dresse une table comme suit :

x'	0	1	2	3	4	5	6
y'	12	11	10	9	8	7	6
x	0	4	8	12	16	20	24
y	48	44	40	36	32	28	24

Donc :

$$S = \{(0; 48); (4; 44); (8; 40); (12; 36); (16; 32); (20; 28); (24; 24)\}$$

Exercice62: résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$\text{suivant: } \begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

Solution5762:

$$\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \equiv -4[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -2[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

Car $2 \wedge 7 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 5[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ 3(5 + 7k) \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ k \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ k \equiv 1 + 5k' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 + 7(1 + 5k'); k' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 35k' + 12; k' \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{35k' + 12; k' \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice63: 1) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{Z}^*$ et $\forall b \in \mathbb{Z}^*$

$$\text{on a : } a \wedge b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a \wedge (a+b) = 1 \\ b \wedge (a+b) = 1 \\ a \wedge b(a+b) = 1 \\ (a+b) \wedge ab = 1 \end{cases}$$

Solution63: on pose $d = a \wedge (a+b)$ montrons que :

$$\begin{aligned} d=1 \text{ on a : } d &= a \wedge b \Rightarrow \frac{d}{a} \text{ et } \frac{d}{a+b} \\ \Rightarrow \frac{d}{a} \text{ et } \frac{d}{a+b-a} &\Rightarrow \frac{d}{a} \text{ et } \frac{d}{b} \Rightarrow \frac{d}{b \wedge a} \Rightarrow \\ \frac{d}{1} &\Rightarrow d=1 \text{ ce qui entraîne: } 1 = a \wedge (a+b) \text{ (1)} \end{aligned}$$

de même on montre que : $1 = b \wedge (a+b)$ (2)

de (1) et (2) en déduit que : $(a+b) \wedge ab = 1$

D'après une proposition

Et on a $a \wedge (a+b) = 1$ et $a \wedge b = 1$ donc

$a \wedge b(a+b) = 1$ D'après la même proposition

Exercice64 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$$

Solution64 : on a : $n^2+5n+6 = (n+2)(n+3)$

$$\text{Et on a : } (2n+5) - 2(n+2) = 1$$

Donc d'après le théorème de Bézout

$$(n+2) \wedge (2n+5) = 1 \text{ (1)}$$

$$\text{De même : on a : } 2(n+3) - (2n+5) = 1$$

Donc d'après le théorème de Bézout

$$(n+3) \wedge (2n+5) = 1 \text{ (2) de (1) et (2) en déduit}$$

$$\text{que : } (2n+5) \wedge ((n+3)(n+2)) = 1$$

$$\text{Donc : } (2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$$

Exercice65 : en utilisant Fermat Montrer que :

$$1) 3^{13} + 5^{35} + 7^{57} \equiv 1[11]$$

$$2) 2^{16n+1} + 7^{32n+2} \equiv 0[17]$$

Solution65 : 1) On a : 11 est premier et 11 ne divise pas 3 alors $3^{10} \equiv 1[11]$ Donc : $3^{13} \equiv 3^3[11] \equiv 5[11]$

De même : On a : 11 est premier et 11 ne divise pas 5 alors $5^{10} \equiv 1[11]$ Donc : $5^{35} \equiv 5^5[11] \equiv 1[11]$

De même : On a : 11 est premier et 11 ne divise pas 7 alors $7^{10} \equiv 1[11]$

$$\text{Donc : } 7^{57} \equiv 7^7[11] \equiv 6[11]$$

$$\text{Finalement on a : } 3^{13} + 5^{35} + 7^{57} \equiv 5+1+6[11] \equiv 1[11]$$

$$2) 2^{16n+1} + 7^{32n+2} \equiv 0[17] ??$$

On a : 17 est premier et 17 ne divise pas 2 alors $2^{16} \equiv 1[17]$ donc : $2^{16n+1} \equiv 2^1[17] \equiv 2[17]$

De même : On a : 17 est premier et 17 ne divise pas 7 alors $7^{16} \equiv 1[17]$ donc : $7^{32} \equiv 1[17]$

$$\text{donc : } 7^{32n+2} \equiv 7^2[17] \equiv 15[17]$$

$$\text{Finalement on a : } 2^{16n+1} + 7^{32n+2} \equiv 0[17]$$

Exercice66 : écrire dans le système de numération a base 3 le nombre 73

Solution66 :

$$1) \text{ On a : } 73 = 3 \times 24 + 1 \quad q_0 = 24 \text{ et } r_0 = 1$$

$$24 = 3 \times 8 + 0 \quad q_1 = 8 \text{ et } r_1 = 0$$

$$8 = 3 \times 2 + 2 \quad q_2 = 2 \text{ et } r_2 = 2$$

$$2 = 3 \times 0 + 2 \quad q_3 = 0 \text{ et } r_3 = 2$$

$$\text{Donc : } 73 = \overline{r_3 r_2 r_1 r_0}_{(3)} = \overline{2201}_{(3)}$$

$$73 = 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0$$

Exercice67 : déterminer les entiers naturels

$$x \text{ et } y \text{ tel que : } x \overline{0} y_{(5)} = \overline{y} \overline{0} x_{(7)}$$

Solution67 :

$$x \overline{0} y_{(5)} = \overline{y} \overline{0} x_{(7)} \Leftrightarrow x \times 5^2 + 0 \times 5^1 + y \times 5^0 = y \times 7^2 + 0 \times 7^1 + x \times 7^0$$

$$\Leftrightarrow 25x + y = x + 49y \Leftrightarrow 48y = 24x \Leftrightarrow 2y = x$$

$$\Leftrightarrow (x; y) = (2k; k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leq x \leq 3 \text{ et}$$

$$0 \leq y \leq 3 \text{ Donc : } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Exercice68 :1) résoudre dans $\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z}$

$$\overline{2}x^3 + x + \overline{3} = \overline{0}$$

2) déterminer les entiers naturels n tels que :

$$7 \text{ divise } \overline{2013}_{(n)}$$

Solution68 : On Dresse une table dans

$$\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z} = \{\overline{0}; \overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5}; \overline{6}\} \text{ Comme suite :}$$

n	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{2}x^3$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$
$\overline{2}x^3 + x + \overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$\overline{2}$ et $\overline{6}$ sont les solutions de l'équation

$$\text{Donc : } S = \{\overline{2}; \overline{6}\}$$

$$2) \overline{2013}_{(n)} = 2 \times n^3 + 0 \times n^2 + 1 \times n^1 + 3 \times n^0 = 2n^3 + n + 3$$

$$7 \text{ divise } \overline{2013}_{(n)} \Leftrightarrow 2n^3 + n + 3 \equiv 0[7]$$

$$\Leftrightarrow \overline{2}n^3 + n + \overline{3} = \overline{0} \text{ Donc : } n = \overline{2} \text{ ou } n = \overline{6}$$

$$\text{Donc : } n = 7k + 2 / k \in \mathbb{N} \text{ ou } n = 7k + 6 / k \in \mathbb{N}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs

et exercices

Que l'on devient un mathématicien

