Exercice 1

1) dans chacun des cas suivants

déterminer x :

a) $12 \equiv x \ [11]$

b) $x \equiv 111 \ [23]$ et $-23 < x < 0$

c) $x \equiv 215 \ [13]$ et $0 \leq x < 13$

2) soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Déterminer n dans chaque cas ci-dessous

a) $13 \equiv 5 \ [n]$ b) $125 \equiv -11 \ [n]$

c) $87 \equiv 74 \ [n]$

Exercice 2

soit p un nombre premier et $p \geq 3$

1) montrer que $p \equiv 1 \ [4]$ ou $p \equiv 3 \ [4]$

2) déduire que $p^2 \equiv 1 \ [8]$

Exercice 3

Soit p un nombre premier supérieur à 5

1) montrer que $p^2 \equiv 1 [3]$

2) montrer que $p^2 \equiv 1 [8]$

3) a et b deux entiers tels que $3a = 8b$

a) montrer que $3/b$ et déduire que $8/a$

b) en déduire que $p^2 \equiv 1 [24]$

Exercice 4

on pose $B_n = 3 \times 4^n + 2 \times 4^{n+1} + 4^{n+2}$ pour tout entier naturel n

1) a) étudier la parité de B_n

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3 | B_n$

c) en déduire que B_n est divisible par 6

2) déterminer $B_n \wedge B_{n+1}$

Exercice 5

1) montrer que $n^2 - n + 4$ et $n^2 + n + 4$ sont pairs

2) déduire que $n^4 \equiv n^2 \ [4]$

Exercice 6

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$(E) : (x+1)^2 = 9 + 5y$

1) soit (x, y) une solution de (E) .

Montrer que $x \equiv 1 \ [5]$ ou $x \equiv 2 \ [5]$

2) déterminer les solutions de (E)

Exercice 7

1) a) déterminer suivant n le reste de la division de 2^n par 3

b) en déduire que le reste de la division de 275423^n et $275423^n + 372121^n$ par 3

2) vérifier que $3^3 \equiv 1 \ [13]$ en déduire que

$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 13 / 3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$

Exercice 8

a) étudier suivant n le reste de la division de 5^n par 13

b) déterminer le reste de la division de 2020^{2014} par 13

c) montrer que :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 13 / 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$

Exercice 9

a) déterminer suivant n le reste de la division de 3^n par 8

b) montrer que $8 / 3^{2n} - 1$ et $8 / 3^{2n+2} + 7$ et $8 / 3^{2n+4} - 1$

c) on pose $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$ déterminer le reste de la division de A_p par 8 (étudier suivant la parité du nombre p)

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes :

1) $\bar{3}\bar{x} = \bar{1}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

2) $\bar{5}\bar{x} = \bar{2}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

3) $\bar{6}\bar{x}^2 + \bar{4} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

4) $\bar{5}\bar{x}^2 + \bar{x} - \bar{4} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

Exercice11

1) vérifier que

$10^3 - 1 = 9\times 111$ et $10^3 + 1 = 7\times 11\times 13$

2) on pose $A_n = 10^{9n} + 2\times 10^{6n} + 2\times 10^{3n} + 1$

a) déterminer le reste de la division de A_n par 111

b) montrer que si n est impair alors A_n est divisible par les nombres 7 , 11 *et* 13

c) on suppose n est pair

(i) montrer que $A_n - 6$ est divisible par 7 , 11 *et* 13

(ii) déterminer le reste de la division de A_n par 111×1001

Exercice 12

1) soit n un entier naturel non nul

a) montrer que :

si n est impair alors $n^2 \equiv 1\ [8]$

b) montrer que si n est pair alors $n^2 \equiv 0\ [8]$ ou $n^2 \equiv 4\ [8]$

2) soient c ; b ; a trois entiers impair

a) montrer que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est un carré parfait

b) montrer que $2(ab + bc + ca) \equiv 6\ [8]$

c) en déduire que $2(ab + bc + ca)$ n'est pas un carré parfait

d) montrer que $ab + bc + ca$ n'est pas un carré parfait

Exercice13

1) a *et* b deux entiers naturels non nuls tels que $(a+b)\wedge ab = p^2$ et p un nombre premier

a) montrer que p^2 / a^2

déduire que p / a et p / b

b) montrer que $a\wedge b = p$ ou $a\wedge b = p^2$

2) on considère dans $\mathbb{N}^2$ le système

$$(S)\quad \begin{cases} (a+b)\wedge ab = 49 \\ a\vee b = 231 \end{cases}$$

a) montrer que $a\wedge b = 7$

b) déterminer les solutions de (S)