Exercices de logique

Exercice 1 Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer. n est un entier naturel, x et y sont des nombres réels.

1. n premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair ,
2. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$,
3. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

Exercice 2 Ecrire les réponses aux questions suivantes, portant sur des entiers naturels, sous la forme d'assertions mathématiques (écrites avec les symboles "$\forall$", "et", "ou", "$\Rightarrow$", "$\Leftrightarrow$") et les prouver.

1. Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?
2. Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?
3. Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?
4. Un nombre entier est-il pair si et seulement si son carré est pair ?

Exercice 3 Soient les quatre assertions suivantes :

1. $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
3. $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, y^2 > x$,
4. $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$.

Les assertions 1, 2, 3 et 4 sont elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

Exercice 4

1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer par l'absurde que, si n n'est pas premier, il admet un diviseur premier p qui est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
2. A l'aide de ce critère, déterminer si les nombres 89, 167 et 191 sont premiers.

Exercice 5 Montrer que $\sqrt{89}$ est irrationnel.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que soit 4 divise n^2, soit 4 divise $n^2 - 1$.

Exercice 7 * Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $n^3 - n$ est divisible par 6 ,
2. $n^5 - n$ est divisible par 30 ,
3. $n^7 - n$ est divisible par 42 .

Indication : Pour 1, on peut factoriser $n^3 - n$ pour voir que ce nombre est multiple de 2 et de 3. Les cas 2 et 3 peuvent se traiter de façon analogue.

Exercice 8 Démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}, \quad n^2 \leqslant 2^n \ .$$

Exercice 9 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit deux propriétés :

$$P_n \ \text{: 3 divise } 4^n - 1 \quad \text{et} \quad Q_n \ \text{: 3 divise } 4^n + 1 \ .$$

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$.
2. Montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Que penser, alors, de l'assertion : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow Q_n$?

Correction d'exercices de logique

Correction 1

1. n pair, $n \neq 2 \Rightarrow n$ non premier. Démo : si n pair, $n \neq 2$ alors 2 divise n et n n'est pas premier.
2. $x = 0$ ou $y = 0 \Rightarrow xy = 0$. Démo triviale.
3. $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$. Démo : si $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$ alors en développant $-x + y = x - y$, d'où $2y = 2x$, $x = y$.

Correction 2

1. Oui. n, m pairs $\Rightarrow nm$ pair. Démo : $\exists i, n = 2i$ donc $nm = 2(im)$ est pair.
2. Oui. n, m impairs $\Rightarrow nm$ impair. Démo : $\exists i, j$, $n = 2i + 1$, $m = 2j + 1$ donc $nm = 2(2ij + i + j) + 1$ est impair (ou par contraposée).
3. Pair. (n pair, m impair) $\Rightarrow nm$ pair (cf 1).
4. Oui. n pair $\Leftrightarrow n^2$ pair. Démo : si n pair alors $n^2 = n \times n$ est pair par 1) (sens $\Rightarrow$) ; Si n impair alors n^2 est impair par 2), ce qui donne le sens $\Leftarrow$ par contraposée.

Correction 3

1. Faux. Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leqslant 0$ (démo : soit $x \in \mathbb{R}$, on prend $y = -x$).
2. Vrai (démo : $y = -x + 1$). Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leqslant 0$.
3. Vrai (démo : soit $x = -1$, $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 > -1$). Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leqslant x$.
4. Vrai (démo : $\alpha = \sqrt{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{+*}$). Négation : $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \exists x \in \mathbb{R}, |x| < \alpha$ et $|x^2| \geqslant \varepsilon$.

Correction 4 1. Soit n non premier. Supposons que n n'a pas de diviseur premier $p \leqslant \sqrt{n}$. n non premier $\Rightarrow \exists a, b \geqslant 2$, $n = ab$. Tout nombre $x \geqslant 2$ a un diviseur premier $\leqslant x$. Si $a \leqslant \sqrt{n}$ ou $b \leqslant \sqrt{n}$, cela donne une contradiction. Donc $a > \sqrt{n}$ et $b > \sqrt{n}$, ce qui implique $n > n$, absurde. D'où le résultat.

2. • $\sqrt{89} \simeq 9.4$. 89 n'est pas divisible par $2, 3, 5$ ou 7, donc 89 est premier.
   • $\sqrt{167} \simeq 12.9$. 167 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7, 11$ donc 167 est premier.
   • $\sqrt{191} \simeq 13.8$. 191 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7, 11, 13$ donc 191 est premier.

Correction 5 Raisonnement par l'absurde. Supposons que $\sqrt{89} = \frac{p}{q}$ avec p, q premiers entre eux. Alors $89q^2 = p^2$. 89 est premier (exo 4) donc 89 divise p : il existe k, $p = 89k$. Donc $q^2 = 89k^2$ et 89 divise q. C'est une contradiction donc $\sqrt{89}$ est irrationnel.

Correction 6 Si $n = 2k$ (pair) alors 4 divise $n^2 = 4k^2$. Si $n = 2k+1$ (impair) alors 4 divise $n^2 - 1 = 4(k^2 + k)$.

Correction 7 $n^3 - n = n(n^2 - 1)$. n pair $\Rightarrow n^3 - n$ multiple de 2. n impair $\Rightarrow n^2 - 1$ pair et $n^3 - n$ multiple de 2.
n multiple de 3 $\Rightarrow n^3 - n$ multiple de 3. $n = 3k+1 \Rightarrow n^2 - 1 = 3(3k^2 + 2k)$ multiple de 3. $n = 3k+2 \Rightarrow n^2 - 1 = 3(3k^2 + 4k)$ multiple de 3. Dans les 3 cas, $n^3 - n$ est multiple de 3.
$n^3 - n$ est divisible par 2 et 3 qui sont premiers entre eux donc $n^3 - n$ est divisible par 6.

Correction 8 Initialisation : pour $n = 4$, $4^2 = 16 = 2^4$.
Hérédité : on suppose $n^2 \leqslant 2^n$ avec $n \geqslant 4$. $n > 2$ donc $2n < n \times n$, donc $2n \leqslant n^2 - 1$. D'où $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leqslant n^2 + n^2 \leqslant 2.2^n = 2^{n+1}$. C'est la propriété au rang $n+1$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4$, $n^2 \leqslant 2^n$.

Correction 9 1. Si P_n est vraie alors $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$ est un multiple de 3 donc P_{n+1} est vraie. Si Q_n est vraie alors $4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3$ est un multiple de 3 donc Q_{n+1} est vraie.

2. Initialisation : $4^0 - 1 = 0$ donc P_0 est vraie. Hérédité : question 1). Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. C'est faux. Preuve par l'absurde : Si Q_{n_0} est vraie alors $(4^{n_0} + 1) + (4^{n_0} - 1) = 4^{n_0}$ est un multiple de 3 à cause de P_{n_0} et Q_{n_0}. Or le seul nombre premier qui divise 4^{n_0} est 2, donc c'est absurde et Q_{n_0} est fausse.