

Exercices corrigés

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 1 cm sur Ox et 0,5 cm sur Oy .

Partie A : Étude d'une fonction polynôme de degré 2

On note C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3, 4]$ par

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$$

- (a) Déterminer f' , la fonction dérivée de f .
(b) Établir le tableau de variation de f sur $[-3, 4]$.
- Déterminer une équation de T , la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -1 .
- Tracer la tangente T puis la courbe C_f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Partie B : Étude d'une fonction polynôme de degré 3

On considère C_g , la courbe représentative de la fonction g définie sur $[-3, 4]$ par

$$g(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1$$

- (a) Déterminer la fonction dérivée g' .
(b) Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire le tableau de variation de g sur $[-3, 4]$.
(c) Combien l'équation $g(x) = 0$ admet-elle de solution(s) sur $[-3, 4]$ (Justifier).
On note α la plus grande de ces solutions.
(d) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g .
- Tracer la courbe C_g dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Correction de l'exercice 1

Partie A

1. (a) On trouve $f'(x) = 3x$

(b) d'où le tableau de variations :

x	-3	0	4
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	$\frac{25}{2}$	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 23

2. On a $f(-1) = \frac{1}{2}$ et $f'(-1) = -3$ d'où l'équation de la tangente cherchée est :

$$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) = -3(x + 1) + \frac{1}{2} = -3x - \frac{5}{2}$$

3. Voir graphe

Partie B

1. (a) Le calcul de la fonction dérivée donne $g'(x) = -3x^2 + 3x + 6$

(b) Pour déterminer le signe de $g'(x)$, on calcule le discriminant Δ , ici égal à 81, ce qui nous donne les deux racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$.

Or, un polynôme du second degré est du signe de a (ici négatif) sauf entre les racines d'où le tableau de variations de g :

x	-3	-1	2	4	
Signe de $g'(x)$	-	0	+	0	-
Variations de g	$\frac{43}{2}$	$\searrow$	$\nearrow$	9	$\searrow$
		$-\frac{9}{2}$			-17

(c) g est strictement décroissante sur l'intervalle $[-3; -1]$ avec $g(-3) > 0$ et $g(-1) < 0$.

L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[-3; -1]$.

g est strictement croissante sur l'intervalle $[-1; 2]$ avec $g(-1) < 0$ et $g(2) > 0$.

L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[-1; 2]$.

g est strictement décroissante sur l'intervalle $[2; 4]$ avec $g(2) > 0$ et $g(4) < 0$.

L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur l'intervalle $[2; 4]$.

Conclusion : L'équation $g(x) = 0$ admet donc trois solutions sur l'intervalle $[-3; 4]$.

(d) α appartient à l'intervalle $[2; 4]$, de plus, $g(3) = 3,5$ qui est positif. On fait donc une table de valeurs avec la calculatrice avec des valeurs allant de 3 à 4 par pas de 0,1.

On trouve $g(3,2) = 0,79 > 0$ et $g(3,3) = -0,80 < 0$ donc : $3,2 < \alpha < 3,3$.

On réitère le même procédé cette fois-ci sur l'intervalle $[3,2; 3,3]$ par pas de 0,01.

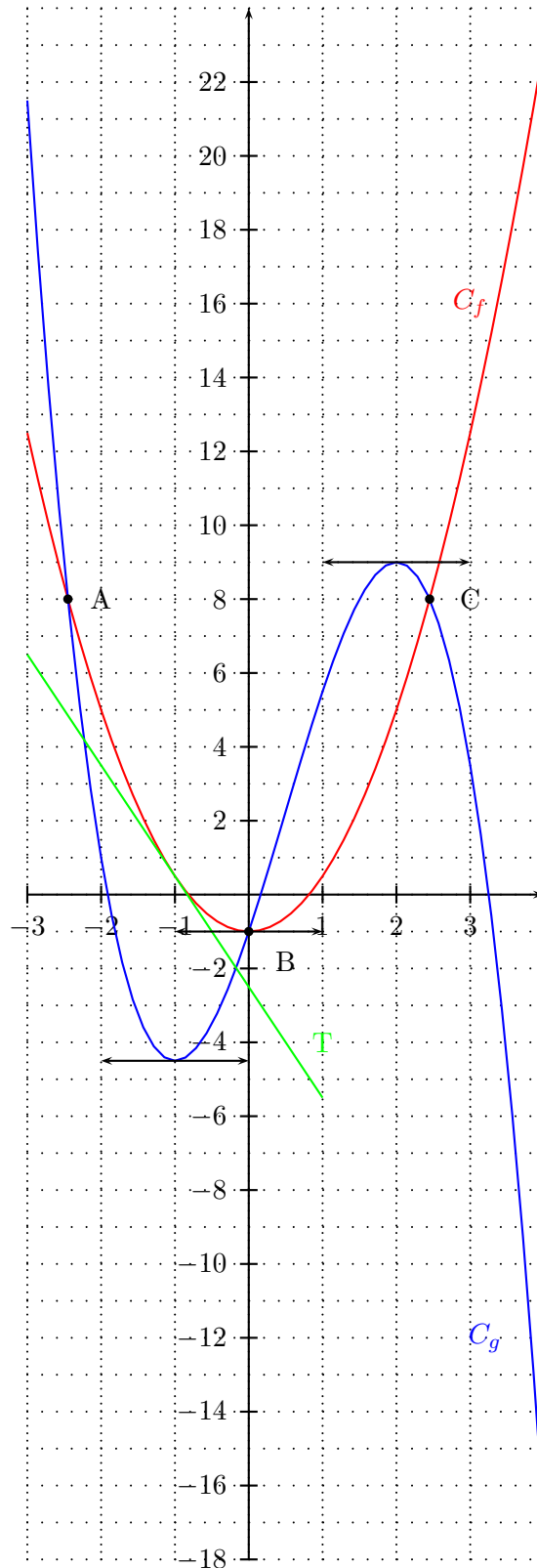
On obtient $g(3,25) = 0,02 > 0$ et $g(3,26) = -0,14 < 0$ donc : $3,25 < \alpha < 3,26$.

2. Pour déterminer l'intersection des deux courbes, il faut résoudre le système
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

On obtient alors pour x : $\frac{3}{2}x^2 - 1 = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1 \iff -x^3 + 6x = 0 \iff x(-x^2 + 6) = 0$
d'où les solutions : $x = 0$, $x = \sqrt{6}$ et $x = -\sqrt{6}$

Les points d'intersection sont donc les points : $A \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix}$.

3.



Exercice 2.

On considère les fonctions f et g définies par :

$$- f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2 - x} \text{ pour } x \neq 2.$$

$$- g(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ pour } x \neq 0.$$

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$?
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$-\frac{1}{x} \leq g(x) \leq \frac{1}{x}$$

En déduire la limite de g en $+\infty$.

Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$?

3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de g en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.
4. (a) Etablir le tableau de signe de $2 - x$.
 (b) En déduire les limites de f en 2^+ puis en 2^- ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathcal{C}_f$ que l'on précisera.
5. (a) Pour tout $x \neq 2$ calculer $f'(x)$.
 (b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x .
 (c) Dresser le tableau de variation complet de f sur $] -\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies par :

$$- f(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{x - 1} \text{ pour } x \neq 1.$$

$$- g(x) = \frac{\cos x + 1}{x} \text{ pour } x \neq 0.$$

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$?
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$0 \leq g(x) \leq \frac{2}{x}$$

En déduire la limite de g en $+\infty$.

Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$?

3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de g en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.
4. (a) Etablir le tableau de signe de $x - 1$.
 (b) En déduire les limites de f en 1^+ puis en 1^- ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathcal{C}_f$ que l'on précisera.
5. (a) Pour tout $x \neq 1$ calculer $f'(x)$.
 (b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x .
 (c) Dresser le tableau de variation complet de f sur $] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

Solution de l'exercice 2

On considère les fonctions f et g définies par :

$$- f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2 - x} \text{ pour } x \neq 2.$$

$$- g(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ pour } x \neq 0.$$

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

On transforme l'expression $f(x)$ (because FI) :

Pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(\frac{2}{x} - 1\right)} = x \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} - 1}$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc par produit on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

De même comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ on a par produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

- (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$?

Les limites en $\pm\infty$ de f valent $\pm\infty$ on ne peut donc pas en déduire l'existence d'asymptote horizontale.

2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$-\frac{1}{x} \leq g(x) \leq \frac{1}{x}$$

$$\forall x > 0, \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \iff -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

En déduire la limite de g en $+\infty$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$?

Du résultat précédent on déduit que $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de g en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.

On refait la même chose mais pour $x < 0$, ce qui donne :

$$\forall x < 0, \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \iff -\frac{1}{x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

On en déduit que $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

4. (a) Etablir le tableau de signe de $2 - x$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	0	$-$

- (b) En déduire les limites de f en 2^+ puis en 2^- ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathcal{C}_f$ que l'on précisera.
D'après le tableau de signe précédent lorsque $x > 2$ on a $2-x < 0$ par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 2-x = 0^-$$

De plus $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - x + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

De même, lorsque $x < 2$ on a $2-x > 0$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 2-x = 0^+$$

De plus $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - x + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

5. (a) Pour tout $x \neq 2$ calculer $f'(x)$.

Pour tout $x \neq 2$ f est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(2-x) - (-1) \times (x^2 - x + 1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 - 2 + x + x^2 - x + 1}{(2-x)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 1}{(2-x)^2}$$

- (b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x .

Pour tout $x \neq 2$, $(2-x)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 4x - 1$, polynôme dont nous allons dresser le tableau de signe.

$\Delta = 16 - 4 = 12$, ce polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{-2} = 2 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

On obtient alors le tableau de signe de f' :

x	$-\infty$	$2-\sqrt{3}$	2	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$

- (c) Dresser le tableau de variation complet de f sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

On déduit du tableau de signe de la dérivée :

x	$-\infty$	$2-\sqrt{3}$	2	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$f(2-\sqrt{3})$	$f(2)$	$f(2+\sqrt{3})$	$-\infty$	

Solution de l'exercice 3

On considère les fonctions f et g définies par :

$$- f(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{x - 1} \text{ pour } x \neq 1.$$

$$- g(x) = \frac{\cos x + 1}{x} \text{ pour } x \neq 0.$$

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

On transforme l'expression $f(x)$ (because FI) :

Pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x^2 \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = x \frac{-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{-1}{1} = -1$$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc par produit on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

De même comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ on a par produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

- (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$?

Les limites en $\pm\infty$ de f valent $\pm\infty$ on ne peut donc pas en déduire l'existence d'asymptote horizontale.

2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$0 \leq g(x) \leq \frac{2}{x}$$

$$\forall x > 0, \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \iff 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \iff 0 \leq \frac{\cos x + 1}{x} \leq \frac{2}{x}$$

En déduire la limite de g en $+\infty$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$?

Du résultat précédent on déduit que $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de g en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.

On refait la même chose mais pour $x < 0$, ce qui donne :

$$\forall x < 0, \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \iff 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \iff 0 \geq \frac{\cos x + 1}{x} \geq \frac{2}{x}$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

On en déduit que $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

4. (a) Etablir le tableau de signe de $x - 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+

- (b) En déduire les limites de f en 1^+ puis en 1^- ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathcal{C}_f$ que l'on précisera.
D'après le tableau de signe précédent lorsque $x > 1$ on a $x - 1 > 0$ par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+$$

De plus $\lim_{x \rightarrow 1^+} -x^2 + x + 1 = -1 + 1 + 1 = 1$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

De même, lorsque $x < 1$ on a $x - 1 < 0$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 = 0^-$$

De plus $\lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + x + 1 = -1 + 1 + 1 = 1$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

5. (a) Pour tout $x \neq 1$ calculer $f'(x)$.
Pour tout $x \neq 1$ f est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{(-2x+1)(x-1) - 1 \times (-x^2+x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2x^2+2x+x-1+x^2-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x-2}{(x-1)^2}$$

- (b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x .

Pour tout $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2+2x-2$, polynôme dont nous allons dresser le tableau de signe.

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$, ce polynôme n'admet pas de racine donc il est de signe constant. Ici on a pour tout $x \neq 1$, $-x^2 + x + 1 < 0$. On obtient alors le tableau de signe de f' :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$-$

- (c) Dresser le tableau de variation complet de f sur $] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$.
On déduit du tableau de signe de la dérivée :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 4

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère

orthonormal ($O ; \vec{i} ; \vec{j}$) (unité graphique : 2 cm).

Etude de la fonction f

- 1) a) Trouver les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- 2) a) Trouver une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
b) Etudier la position de T par rapport à $\mathcal{C}$.
- 3) Tracer T et la courbe $\mathcal{C}$.

Solution de l'exercice 4

Etude de la fonction f

$$1) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} - 1 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|} - 1 = 0$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} - 1$$

$$\text{avec } u(x) = x + 1 \text{ et } v(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$$

$$u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - x(x+1)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 - x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$f'(x)$ est du signe de $1 - x$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+		-
$f(x)$	-2	$\sqrt{2} - 1$	0

$$f(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

2) a) Une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$f'(0) = 1 \text{ et } f(0) = 0$$

Une équation de T est donc $y = x$.

$$b) \quad f(x) - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 - x = (x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+1} > 1 \Rightarrow x^2+1 < 1 \Rightarrow x^2 < 0$$

Impossible car un carré est toujours positif.

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0 \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

$$f(x) - x \text{ est donc du signe de } -(x+1)$$

Si $x < -1$ alors $f(x) - x > 0$: la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de T.

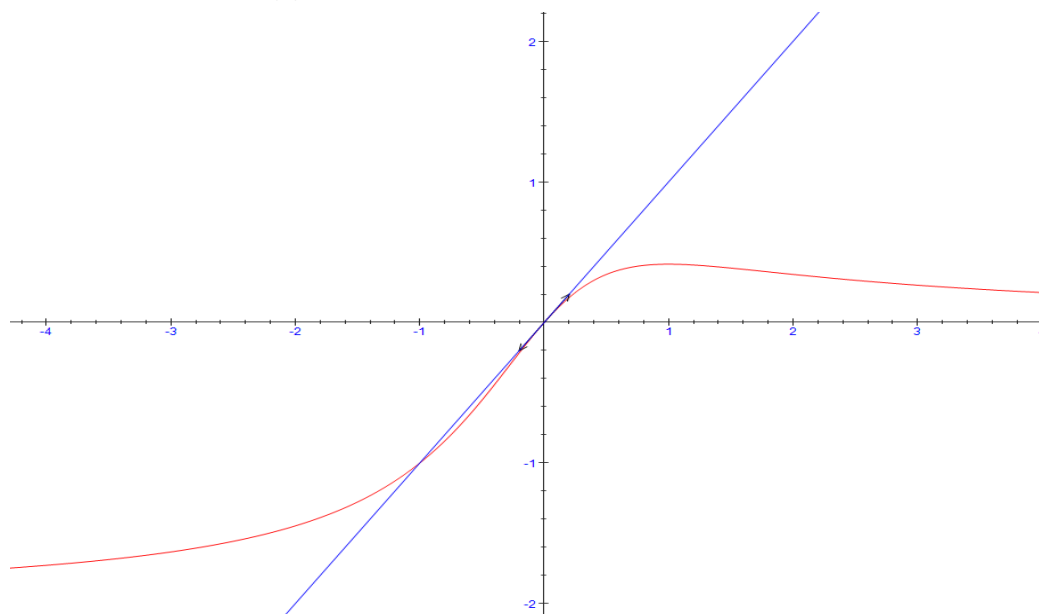
Si $x = -1$ alors $f(x) = x$: la courbe $\mathcal{C}$ et T se coupent au point $(-1 ; -1)$

Si $-1 < x < 0$ alors $f(x) - x < 0$: la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de T.

Si $x = 0$ alors $f(x) = x$: la courbe $\mathcal{C}$ et T se coupent au point $(0 ; 0)$

Si $x > 0$ alors $f(x) - x < 0$: la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de T.

3)



Exercice 5

- On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I = [0; \frac{\pi}{4}]$ par $g(x) = \tan(x) - x$.
 - Etudier les variations de la fonction g et en déduire son signe.
 - Montrer que, pour tout x de I , on a $0 \leq \tan(x) \leq 1$.
 - On considère la fonction h définie sur I par $h(x) = \tan(x) - 2x$. Montrer que la dérivée de h peut s'écrire $h'(x) = \tan^2(x) - 1$. Etudier les variations de h et en déduire son signe.
- On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \tan(x) - x - \frac{4x^3}{3}$.
 - Montrer que la dérivée de f peut s'écrire $f'(x) = (\tan(x) + 2x)(\tan(x) - 2x)$. En déduire le signe de f' .
 - Dresser le tableau de variations de la fonction f et en déduire son signe.
 - Montrer que, pour tout x de I , on a $x \leq \tan(x) \leq x + \frac{4x^3}{3}$.
- Calculer les deux limites suivantes : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\tan x - x}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right)$.

Solution de l'exercice 5

- La fonction g est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $g'(x) = \tan^2(x) + 1 - 1 = \tan^2(x)$ est positif ; donc la fonction g est croissante sur I et comme $g(0) = 0$, la fonction g est positive sur I .
 - Pour tout x de I , on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(x) \leq 1$ donc $1 \leq \frac{1}{\cos(x)} \leq \sqrt{2}$ et $0 \leq \sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $0 \leq \tan(x) \leq 1$.
 - La fonction h est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $h'(x) = \tan^2(x) + 1 - 2 = \tan^2(x) - 1$; d'après la question précédente, $h'(x)$ est négative et donc h est décroissante sur I ; de plus, $h(0) = 0$, donc h est négative sur I .
- La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $f'(x) = \tan^2(x) + 1 - 1 - 4x^2 = \tan^2(x) - 4x^2$; donc $f'(x) = (\tan(x) + 2x)(\tan(x) - 2x)$; d'après les questions précédentes, $\tan(x) - 2x \leq 0$ et $\tan(x) + 2x \geq 0$ donc $f'(x)$ est négative et donc f est décroissante sur I ; de plus, $f(0) = 0$, donc f est négative sur I .
 - Le tableau de variations de f : (Le signe de f sur I : $f(x) \leq 0$)

x	0	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	0	$f(\frac{\pi}{4})$

- Pour tout x de I , on a $0 \leq \tan(x) - x \leq \frac{4x^3}{3}$ et si $x \neq 0$, $0 \leq \frac{\tan(x) - x}{x^2} \leq \frac{4x}{3}$. Comme

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{4x}{3} = 0$ alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\tan x - x}{x^2} = 0$. La fonction tangente est dérivable sur I , donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right) \text{ est le nombre dérivé de } \tan(x) \text{ en } \frac{\pi}{4}, \text{ car } \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right) = \tan'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2.$$

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos^2(x)$ et C sa courbe représentative.

1. a) Démontrer que pour tout réel x , $x \leq f(x) \leq x + 1$.
 b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 c) Interpréter graphiquement l'encadrement précédent.
2. On note (d_1) et (d_2) les droites d'équation $y = x$ et $y = x + 1$.
 Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec la droite (d_1) , puis avec la droite (d_2) .
3. a) Déterminer la fonction dérivée f' de f . Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 1 - \sin(2x)$.
 b) En déduire le sens de variations de la fonction f .
 c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.
4. a) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$.
 b) Tracer (d_1) , (d_2) et la représentation graphique de f sur $[0; \pi]$.
5. a) Démontrer que pour tout réel x , $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.
 b) Comment déduit-on la courbe C de la représentation graphique de f sur $[0; \pi]$?

Solution de l'exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos^2(x)$ et C sa courbe représentative.

1. a) Pour tout réel x , on sait que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $0 \leq \cos^2(x) \leq 1$, et $x \leq f(x) \leq x + 1$.
 b) On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De même,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
 c) L'encadrement précédent permet d'affirmer que la courbe C est située entre la droite d'équation $y = x$ et la droite d'équation $y = x + 1$.
2. Les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec la droite (d_1) sont les solutions de l'équation : $f(x) = x$, qui équivaut à $\cos^2(x) = 0$, soit $\cos(x) = 0$. Les solutions de cette équation sont les nombres $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les ordonnées respectives sont $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec la droite (d_2) sont les solutions de l'équation : $f(x) = x + 1$, qui équivaut à $\cos^2(x) = 1$, soit $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = -1$. Les solutions de ces équations sont les nombres $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les ordonnées respectives sont $k\pi + 1$.

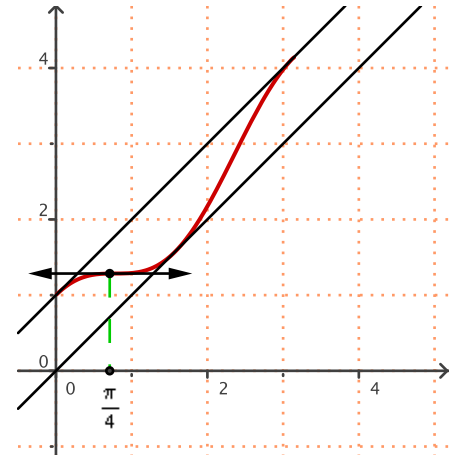
3. a) La fonction f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. La dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$, et la dérivée de u^2 est $2uu'$. D'où, pour tout réel x , $f'(x) = 1 - 2\sin(x)\cos(x) = 1 - \sin(2x)$.
 b) On sait que, pour tout réel x , $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $-1 \leq -\sin(2x) \leq 1$, et $0 \leq f'(x) \leq 2$. Donc la dérivée est positive et la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) L'équation $f'(x) = 0$ équivaut à $\sin(2x) = 1$, équivaut à $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4. a) Le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	π
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	1	$\pi + 1$	

b) Représentation graphique de f sur $[0; \pi]$:



5. a) Pour tout réel x , on a $f(x + \pi) = x + \pi + \cos^2(x + \pi) = x + \pi + \cos^2(x)$

car $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, donc $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.

b) Pour $x \in [0; \pi]$, soit $M(x; y)$ un point de la courbe C .

Comme $f(x + \pi) = f(x) + \pi$, le point de la courbe d'abscisse

$(x + \pi)$ a pour ordonnée $f(x + \pi) = f(x) + \pi = y + \pi$.

On déduit la courbe C de la représentation graphique de f sur

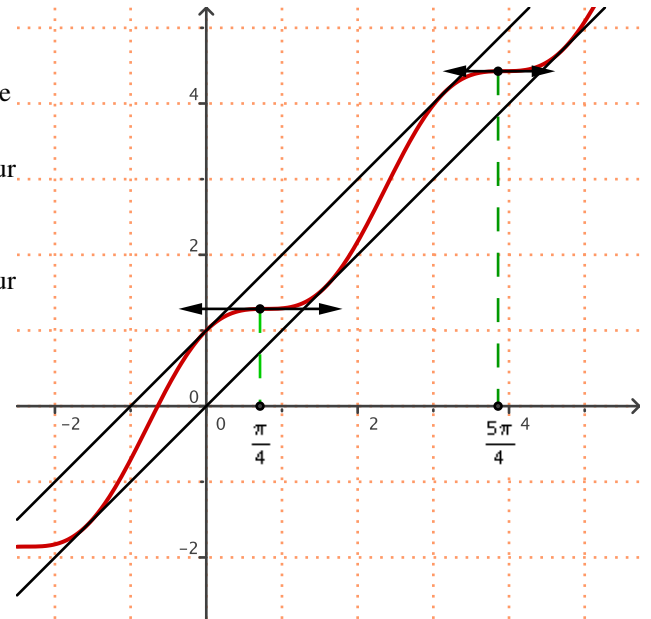
$[\pi; 2\pi]$ par une translation de vecteur $\pi \vec{i} + \pi \vec{j} =$

$\pi(\vec{i} + \vec{j})$. Etc...

On déduit la courbe C de la représentation graphique de f sur

$\mathbb{R}$ par des translations de vecteur $k\pi \vec{i} + k\pi \vec{j}$ avec

$k \in \mathbb{Z}$.



Exercice 7

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$.

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de la fonction f .

2. a) Montrer que pour tout réel x de D_f , $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

c) Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe C_f .

3. Montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C_f .

4. Étude de la dérivabilité de f en -1 et en 1 :

a) Montrer que $\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1$. En déduire $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$. La fonction f est-elle dérivable en -1 ?

b) La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

5. a) Étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de dérivabilité.

b) Dresser le tableau de variations de f sur D_f .

6. Tracer la courbe ainsi que les tangentes aux points d'abscisses -2 , -1 , 1 et 2 .

Solution de l'exercice 7

1. l'ensemble de définition D_f de la fonction f est l'ensemble des réels x tels que $x^2 - 1 \geq 0$. Soit $x^2 \geq 1$, soit $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$. Donc $D_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

2. a) Pour tout réel x de D_f , $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x = \frac{(x^2 - 1) - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$ en utilisant l'identité remarquable

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

c) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, la courbe C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) en $+\infty$.

3. Pour montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à C_f , on étudie $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x)) =$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x). \text{ On peut écrire } \sqrt{x^2 - 1} + x = \frac{(x^2 - 1) - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \frac{-1}{f(x)} \text{ et comme } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty,$$

alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x)) = 0$. Donc la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C_f en $-\infty$.

4. Étude de la dérivabilité de f en -1 et en 1 :

a) Pour $x < -1$: $x - 1 < 0$, d'où $-x + 1 > 0$ et $-x - 1 > 0$. Ainsi $\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x - 1}{x + 1} = \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x+1)^2}} - 1 = \frac{\sqrt{(-x+1)(-x-1)}}{\sqrt{(-x-1)^2}} - 1 = \frac{\sqrt{(-x+1)(-x-1)}}{-x-1} - 1 = \sqrt{\frac{-x+1}{-x-1}} - 1$. D'où $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\sqrt{\frac{-x+1}{-x-1}} - 1 \right) = +\infty$, car $\lim_{x \rightarrow -1} (-x-1) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow -1} (-x+1) = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x-1}{-x-1} = +\infty$. La fonction f n'est pas dérivable en -1 .

b) Pour $x > 1$: $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x + 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x-1)^2}} - 1 = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1$.

D'où $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$. La fonction f n'est pas dérivable en 1 .

5. a) La fonction f est dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont.

D'où $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur:

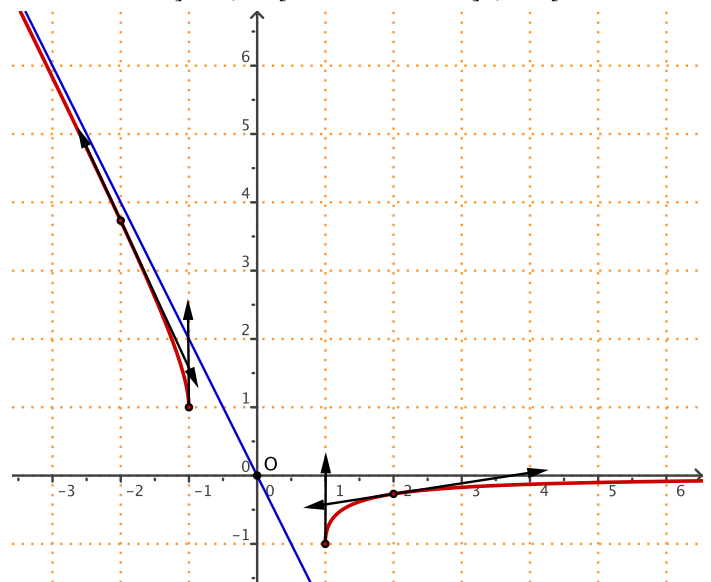
Si $x < -1$, x et $-\sqrt{x^2 - 1}$ sont négatifs, donc $f'(x) \leq 0$.

Si $x > 1$, on a $0 \leq x^2 - 1 \leq x^2$, donc $\sqrt{x^2 - 1} \leq x$ par la croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$; et $x - \sqrt{x^2 - 1} \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$. La fonction f est décroissante sur $]-\infty; -1[$ et croissante sur $]1; +\infty[$.

b) Le tableau de variations de f sur D_f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	Non définie	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	Non définie	0

6. La courbe ainsi que les tangentes aux points d'abscisses -2 , -1 , 1 et 2 :



Exercice 8

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}$.
2. Étudier la parité de la fonction f .
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. a) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C représentative de la fonction f .
b) En utilisant la question 2, déterminer une autre asymptote oblique à C .
5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
6. Dresser le tableau de variations de f sur D_f .
7. Préciser l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1.
8. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Solution de l'exercice 8

1. Pour tout réel x , $x^2 + 1$ est strictement positif, donc $\sqrt{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et donc l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}$.

2. D_f est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout réel x , $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} - 1 = \sqrt{x^2+1} - 1 = f(x)$. Donc la fonction f est paire.

3. Comme f est paire, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+1) = +\infty$ et que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc en utilisant les limites de fonctions composées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

4. a) Pour montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C , on étudie la limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = +\infty$. Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à C en $+\infty$.

b) Par symétrie, la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à C en $-\infty$.

5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

La dérivée de $\sqrt{u}$ est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$. D'où la dérivée de f est $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ qui est du signe de x . La fonction f

est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

6. Le tableau de variations de f sur D_f :

7. L'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1 est

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

8. L'équation $f(x) = 0$ équivaut à $\sqrt{x^2+1} = 1$, soit $x^2 + 1 = 1$, soit $x^2 = 0$. La seule solution est 0.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Exercice 9

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- a) Montrer que pour $x \in]-\infty; 1[$, $\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x-1} = -\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}$.
- b) La fonction f est-elle dérivable en 1 ?
- Étudier les variations de f sur l'ensemble $]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Montrer que les droites d'équation $y = x - 2$ et $y = -x + 2$ sont asymptotes obliques à la courbe C représentative de f .

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

- Étudier la parité de la fonction f .
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
- On admet que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.
- Déduire des questions 1 et 3 que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.
- Que peut-on déduire des questions 1, 3 et 4 pour la courbe C représentative de la fonction f ?

Solution de l'exercice 9

1. L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des réels x tels que $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Le discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$, donc il y a deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. Le signe de $x^2 - 4x + 3$ est positif pour les valeurs à l'extérieur des racines; soit $D_f =]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4x + 3 = +\infty$ en utilisant la propriété: la limite d'un polynôme à l'infini est la limite de son terme de plus

haut degré. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4x + 3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 0$.

3. a) Pour $x \in]-\infty; 1[$, $x - 1 = -\sqrt{(x-1)^2}$, d'où $\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x-1} = \frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{-\sqrt{(x-1)^2}} = -\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0^{-}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x-3) = -2$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x-3}{x-1}} = +\infty$, et la fonction f n'est pas

dérivable en 1.

4. La fonction f est dérivable sur $] -\infty ; 1[\cup]3 ; +\infty[$ comme composée de fonctions qui le sont.

On sait que $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $f'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ qui est du signe de $x-2$ puisque le

dénominateur est strictement positif. Ainsi la fonction f est

Étudier les variations de f sur l'ensemble $] -\infty ; 1[\cup]3 ; +\infty[$.

5. Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0		0 ↗ $+\infty$	

$$6. \text{ On a } f(x) - (x-2) = \frac{\sqrt{x^2-4x+3} - (x-2)}{\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3} + (x-2)}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3} + (x-2)} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty,$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-2)) = 0$. Ainsi, la droite

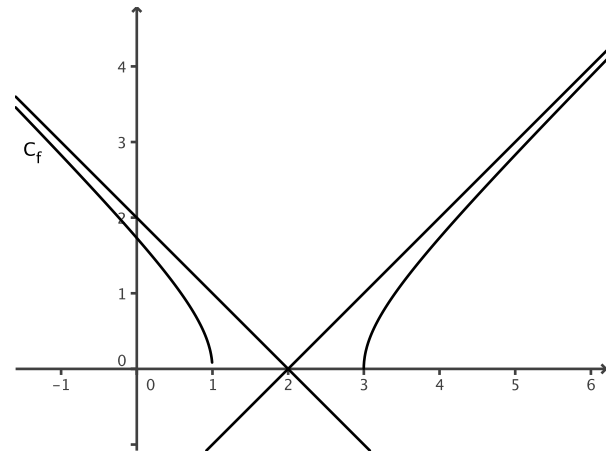
d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$.

$$\text{De même, On a } f(x) - (-x+2) = \frac{\sqrt{x^2-4x+3} + x - 2}{\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3} - x + 2}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3} - x + 2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+2) = +\infty, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x+2)) = 0.$$

Ainsi, la droite d'équation $y = -x + 2$ est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.



solution de l'exercice 10

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$ qui est centré en 0. De plus, pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, $-x$ appartient $\mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -x \sin\left(\frac{1}{-x}\right) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ car la fonction sinus est impaire. Donc la fonction f est paire.

2. On sait que pour tout réel x , $-1 \leq \sin x \leq 1$; donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$; et $-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

3. On admet que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. En posant $X = \frac{1}{x}$, on a $\frac{\sin X}{X} = \frac{\sin(1/x)}{1/x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1.$$

4. Comme la fonction f est paire et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

5. La courbe C représentative de la fonction f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, et admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

- Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
- Etudier les variations de f .
- a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point A d'abscisse a différent de -1 .
b) Déterminer l'abscisse du point B intersection de T et de l'axe des abscisses.
c) Soit H le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses.
Déterminer l'aire du triangle AHB .
Cette aire dépend-elle de a ?

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

- Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
- Etudier les variations de f .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Montrer que la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C .
- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 .
- a) Trouver tous les polynômes du second degré dont la courbe représentative admet la droite T comme tangente au point d'abscisse 0 .
b) Parmi ces polynômes, en existe-t-il un qui passe par le point A de coordonnées $(2; 1)$? Justifier la réponse.
- Représenter graphiquement à l'aide de Geogebra, la courbe C , la tangente T , la droite (d) , le polynôme (s'il existe de la question 6. b).

Solution de l'exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$; On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$;
On a $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$ car $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x+1) = 0^+$; On a $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$ car $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x+1) = 0^-$;
- Pour étudier les variations de f , on détermine la fonction dérivée : cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Et $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty ; -1[$ et sur $] -1 ; +\infty [$.
- a) Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point A d'abscisse a différent de -1 est de la forme $y = f'(a)(x-a) + f(a) = \frac{-1}{(a+1)^2} (x-a) + \frac{1}{a+1} = \frac{-(x-a)+a+1}{(a+1)^2} = \frac{-x+2a+1}{(a+1)^2}$.

b) L'abscisse du point B intersection de T et de l'axe des abscisses vérifie les deux équations

$$y = 0 \text{ et } y = \frac{-x+2a+1}{(a+1)^2}; \text{ soit } -x+2a+1=0, \text{ d'où } x=2a+1.$$

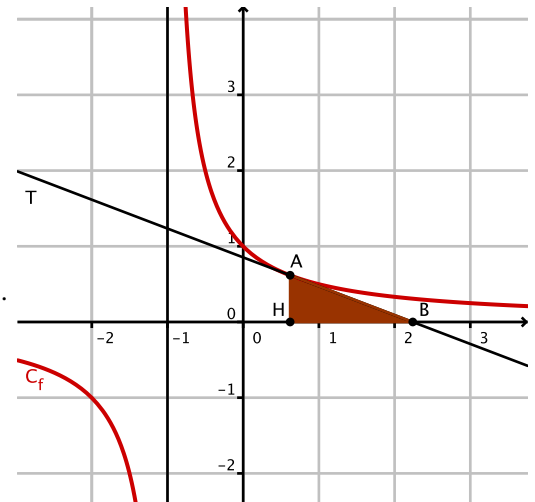
Donc B(2a+1; 0).

c) Si H le projeté orthogonal de A(a; f(a)) sur l'axe des abscisses, alors H(a; 0).

Le triangle AHB est rectangle en H, donc l'aire du triangle

$$A_{HB} = \frac{HA \times HB}{2} = \frac{|f(a)| \times |2a+1-a|}{2} = \frac{|1/(a+1)| \times |a+1|}{2} = \frac{1}{2}.$$

Cette aire est invariante pour tout réel a de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.



Solution de l'exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$; on obtient une forme indéterminée. Pour lever cette indétermination, on utilise la quantité conjuguée: on multiplie et on divise $f(x)$ par $\sqrt{x^2+1} + x$:

$$\text{on obtient } f(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Pour étudier les variations de f , on détermine la fonction dérivée: cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme

somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. Le signe de cette

dérivée dépend du signe du numérateur: $x - \sqrt{x^2+1}$. Or, pour tout réel x , $x^2 < x^2+1$, donc $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$ puisque la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$. Donc $|x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $x \leq |x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $x - \sqrt{x^2+1} < 0$, et la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Le tableau de variations de la fonction f :

4. Pour montrer que la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C, ici en $-\infty$, il faut

montrer que la limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x)) = 0$.

$$\text{Or } f(x) + 2x = \sqrt{x^2+1} + x = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}.$$

On a vu précédemment que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$, et la droite (d)

d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.

5. Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -x + 1$.

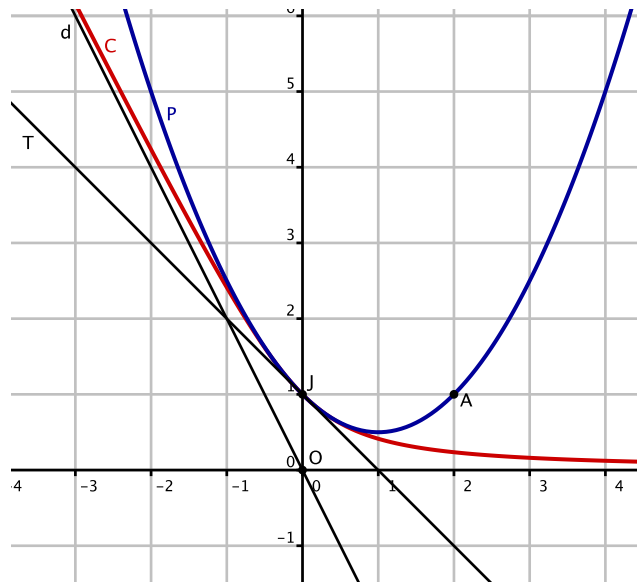
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$+\infty$	0

6. a) Les polynômes P du second degré dont la courbe représentative admet la droite T comme tangente au point d'abscisse 0 vérifient $P(0) = f(0) = 1$ et $P'(0) = f'(0) = -1$.

Un polynôme du second degré est de la forme $ax^2 + bx + c$. Donc $P(0) = c = 1$ et $P'(x) = 2ax + b$, soit $P'(0) = b = -1$. Donc $P(x) = ax^2 - x + 1$.

b) Parmi ces polynômes, l'un passe par le point A de coordonnées $(2; 1)$ si $P(2) = 1$, soit $P(x) = 4a - 2 + 1 = 4a - 1 = 1$, soit $a = \frac{1}{2}$.

7. Représentation graphique de la courbe C , la tangente T , la droite (d) , le polynôme de la question 6. b).



Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 6}{x - 2}$.

- Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
- Etudier les variations de la fonction f .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- a) Déterminer des réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$.
- b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe C .
- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

Exercice 14

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.
Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction f .

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.

Solution de l'exercice 13

1. On utilise la propriété : la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$.

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty.$$

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (2x^2-6) = 2$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x-2) = 0^+$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{2x^2-6}{x-2} = +\infty$ par quotient de limites.

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (2x^2-6) = 2$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x-2) = 0^-$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2x^2-6}{x-2} = -\infty$ par quotient de limites.

2. Pour étudier les variations de la fonction f , on détermine la fonction dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{4x(x-2) - (2x^2-6) \times 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur: on calcule le discriminant : $\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 > 0$. Il y a deux racines $x_1 = \frac{8-\sqrt{16}}{2 \times 2} = 1$ et $x_2 = \frac{8+\sqrt{16}}{2 \times 2} = 3$. Ce numérateur est du signe de $a = 2 > 0$ pour les valeurs extérieures aux racines.

3. Le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$							
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+					
$f(x)$	$-\infty$		4		$-\infty$			$+\infty$		12		$+\infty$

$$4. \text{ a) On a } ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \frac{ax^2+(b-2a)x-2b+c}{x-2} = \frac{2x^2-6}{x-2}.$$
 Par identification,

on trouve $a = 1$, $b - 2a = 0$ et $-2b + c = -6$; et on trouve $a = 2$, $b = 4$ et $c = 2$.

Donc, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = 2x + 4 + \frac{2}{x-2}$.

b) Pour montrer que la droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$, on montre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0 : \text{ On a } f(x) - (2x+4) = \frac{2}{x-2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-2} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x+4)) = 0. \text{ On}$$

montre de même que la droite est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.

5. Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{3}{2}x + 3$.

6. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses, on résout l'équation :

$$f(x) = 0, \text{ soit } 2x^2 - 6 = 0 \text{ équivaut à } 2(x^2 - 3) = 0 \text{ équivaut à } x^2 - 3 = 0 \text{ équivaut à } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}.$$

Donc les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses sont $(\sqrt{3}; 0)$ et $(-\sqrt{3}; 0)$.

Solution de l'exercice 14

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.
 Pour montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction f en $+\infty$, on détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$. On a $f(x) - 2x = \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = +\infty$ par somme de limites, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$.
 Donc, la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction f en $+\infty$.
 De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = +\infty$, donc la droite d'équation $y = 2x$ n'est pas asymptote à C en $-\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = 1$ (il suffit de calculer $f(0)$).

Pour tout réel x de $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

Ainsi $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = 0$.

Exercice 15

On considère la courbe C d'équation $y = 1 - x^2$ et le point M de la courbe C d'abscisse x .

PARTIE A

Pour tout réel x , on note $f(x)$ la distance OM .

1. Expliciter la fonction f et préciser son ensemble de définition.
2. Étudier la parité de la fonction f .
3. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Étudier les variations de f .
5. Préciser les extremums de la fonction f et en quelles valeurs de x ils sont atteints.
6. Faire la représentation graphique de C et la position de M correspondants aux extremums de la fonction f .

PARTIE B

Pour tout réel x , on note $g(x)$ le coefficient directeur (lorsqu'il existe) de la droite (OM) .

1. Expliciter la fonction g et préciser son ensemble de définition.
 2. Étudier la parité de la fonction g .
 3. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ représentative de la fonction g ?
 4. Étudier les variations de g .
 5. Dresser le tableau de variations de la fonction g .
 6. Montrer que la courbe Γ admet une asymptote oblique (d), que l'on précisera.
 7. Étudier la position relative de Γ et de (d).
 8. A l'aide d'un logiciel, faire la représentation graphique de Γ et des asymptotes.
- Facultatif : Existe-t-il des positions de M telles que la distance OM égale le coefficient directeur de (OM) ?

Solution de l'exercice 15

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère la courbe C d'équation $y = 1 - x^2$ et le point M de la courbe C d'abscisse x .

PARTIE A : Pour tout réel x , on note $f(x)$ la distance OM .

$$1. \text{ La distance } OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}.$$

Le polynôme $x^4 - x^2 + 1 = X^2 - X + 1$ a un discriminant égal à $-3 < 0$, donc ne s'annule pas et est toujours du signe de $a = 1$, donc strictement positif. Ainsi, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2. Étude de la parité de la fonction f : l'ensemble de définition est centré en 0, et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = \sqrt{(-x)^4 - (-x)^2 + 1} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} = f(x)$; donc la fonction f est paire.

3. Les limites de la fonction f : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^4 - x^2 + 1} = +\infty$ car la limite d'un polynôme en l'infini est la limite de son terme de plus haut degré. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc par la limite de fonctions composées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De même, et par la parité, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

4. Les variations de f : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables ;

$$\text{et } f'(x) = \frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \frac{x(2x^2 - 1)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} \text{ qui est du signe du numérateur; } 2x^2 - 1 = 0 \text{ pour } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. D'où le tableau de signes de f' et les

variations de f :

5. Le maximum local de f est 1 atteint en $x = 0$; le

minimum est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ atteint en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. La représentation graphique de C et la position de M correspondants aux extremums de la fonction f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
x	-	-	0	+	
$2x^2 - 1$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

PARTIE B :

1. Le coefficient directeur de la droite (OM) est égal à

$$\frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \frac{1 - x^2}{x} = g(x) \text{ qui est défini sur } \mathbb{R}^*.$$

2. Étude de la parité de la fonction g : l'ensemble de définition est centré en 0, et pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$g(-x) = \frac{1 - (-x)^2}{-x} = \frac{1 - x^2}{-x} = -g(x); \text{ donc la fonction } g \text{ est impaire.}$$

3. La fonction g est une fonction rationnelle, donc la limite en l'infini est la limite du quotient des termes de plus haut degré : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 - x^2) = 1 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0^+, \text{ donc par quotient de limites, } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty. \text{ Par la parité, } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = -\infty.$$

On peut déduire que la courbe Γ admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

4. Les variations de g : la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables ;

$$\text{et } g'(x) = \frac{(-2x)(x) - (1 - x^2)}{x^2} = \frac{-x^2 - 1}{x^2} \text{ qui est du signe du numérateur qui est strictement négatif. Donc, la}$$

