Série produit scalaire dans le plan

Exercice n°1 :

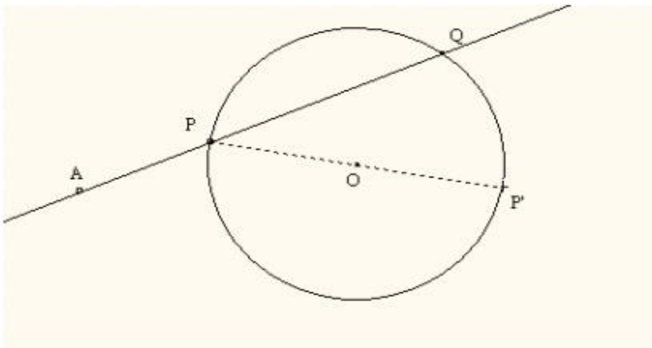
ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de $[BC]$. Calculer les produits scalaires suivants :
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CI}$; $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AI}$.

Exercice n°2 :

ABC est un triangle dans le quel AB = 2 et AC = 3. De plus $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$.
Ce triangle est il rectangle ? (si oui préciser en quel sommet).

Exercice n°3 :

C est un cercle de centre O et de rayon R et A est un point fixé du plan.



Le but du problème est d'établir la propriété suivante :
Quelle que soit la droite (d) passant par A, coupant le cercle C en deux points P et Q, le produit scalaire $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ est constant.

1. Soit P' le point diamétralement opposé à P. Montrer que $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'}=AO^2-R^2$.
3. Conclure.

Exercice n°4 :

ABCD est un parallélogramme tel que AB = 4, AD = 5 et AC = 7.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
2. Calculer en développant $\left\|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right\|^2$.
3. En déduire BD

Exercice n°5 :

ABCD est un rectangle de longueur L et largeur ℓ. Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC).

1. Montrer que $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=L^2-\ell^2$ (on pourra décomposer les vecteurs suivant des directions orthogonales). En déduire HK en fonction de L et ℓ.
2. Comment choisir L et ℓ pour avoir AC = 2 HK.

Exercice n°6 :

Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne A (- 2 ; 2) et B(2 ; 2).

1. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
2. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a : $MA^2+MB^2=2MI^2+\dfrac{AB^2}{2}$
3. Démontrer que l'ensemble E des points M du plan tels que : $MA^2+MB^2=40$

est un cercle (C) de centre I et de rayon $r = 4$.

4. Déterminer une équation du cercle (C).
5. Déterminer les coordonnées des (éventuels) points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
6. Soit λ un réel négatif. Comment choisir λ pour que le point $Z\left(\sqrt{7},\lambda\right)$ soit sur (C) ?
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en Z.

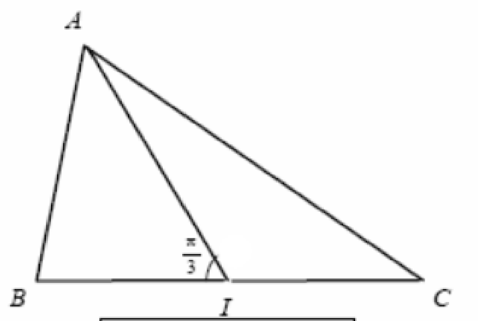
Exercice n°7 :

L'unité de longueur est le centimètre.
O et A sont deux points tels que OA = 2.

1) Déterminer et placer sur une figure le point H de la droite (OA) tel que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=10$
2) Déterminer et représenter sur la figure précédente l'ensemble **E** des points M du plan tels que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}=10$.
   (**E** *est la ligne de niveau 10 de la fonction* $M\rightarrow\vec{u}.\overrightarrow{OM}$, *avec* $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$)

Exercice n°8 :

ABC est un triangle et I est le milieu de [BC].
(voir les données sous la figure)



$BI = CI = 2$
$AI = 3$

Calculer :

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
2. AB^2+AC^2
3. AB^2-AC^2
4. AB et AC.

Exercice n°9 :

Dans un plan P on donne un rectangle $ABCD$ tel que $AB=2BC=4$.
On note $O=A*B$. $J\in[CD]$ tel que $CJ=1$ et I le point d'intersection des deux droites (AC) et (BJ).

1- a) Calculer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CJ}$. En déduire que $(AC)\perp(BJ)$.
   b) Calculer BJ puis la distance du point B à la droite (AC).

2- Soit $F=\{M\in P \text{ tel que } MA^2+MB^2=24\}$. Déterminer et construire l'ensemble F.

3- On note H le point du plan défini par $BH=2\sqrt{3}$ et $\widehat{ABH}=\dfrac{\pi}{6}$ et E le point tel que $\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{HE}=\vec{0}$.
   b) Calculer AH et en déduire la nature du triangle ABH.
   c) Soit $F'=\{M\in P \text{ tel que } MB^2+2ME^2=30\}$. Vérifier que $A\in F'$ puis déterminer et construire l'ensemble F '.

Exercice n°10 :

ABC est un triangle tel que AB = 6, AC = 4 et $BC = 2\sqrt{19}$.

1. a) Démontrer que $B\hat{A}C = \frac{2\pi}{3}$ rd. Construire le triangle ABC.

   b) Calculer la distance CI où $I = A * B$.

2. Déterminer et construire chacun des ensembles suivants :

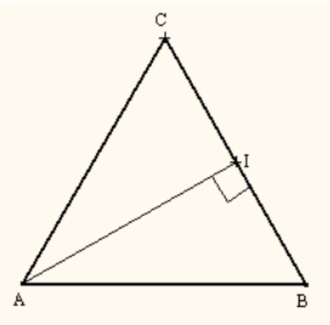
   a) $E = \left\{ M \in P / MA^2 + MB^2 = 92 \right\}$.

   b) $F = \left\{ M \in P / MA^2 - MB^2 = -60 \right\}$, (vérifier que $C \in F$).

   c) $\Gamma = \left\{ M \in P / MB^2 - 4MA^2 = 12 \right\}$.

Solutions des exercices

Solutions de l'exercice1 :



$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos A\hat{B}C = 5 \times 5 \times \cos 60° = \frac{25}{2}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = CA \times CI \times \cos A\hat{C}I = 5 \times \frac{5}{2} \times \cos 60° = \frac{25}{4}$$

$$\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AI} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right) \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$$

Exercice n°2 :

AB = 2 et AC = 3 et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} \cdot + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = BA^2 - \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 4 = 0$$

$\Rightarrow$ ABC est un triangle rectangle en B.

Autrement :

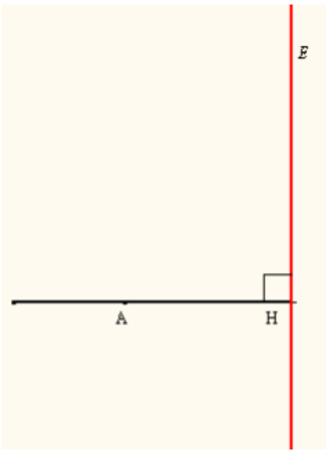
$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 9 - 8 = 5$$

$BC^2 + BA^2 = AC^2 \Rightarrow$ BAC est un triangle rectangle en B.

Exercice n°3 :

1. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$, car Q est le projeté orthogonal de P ′ sur la droite (AP) .
2. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP'}\right)=AO^2+\overrightarrow{AO}\cdot\left(\underbrace{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP'}}_{\vec{0}}\right)+\overrightarrow{OP}\cdot\underbrace{\overrightarrow{OP'}}_{-\overrightarrow{OP}}=AO^2-OP^2=AO^2-R^2$
3. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'}=AO^2-R^2$ c'est une constante puisque A est fixe.

Exercice n°7 :



1. H ∈ (OA) tel que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=10$

$$H\in(OA)\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}=\begin{cases}OA\times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens}\\ \text{ou}\\ -OA\times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire}\end{cases}$$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=10>0\Rightarrow\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens et OA × OH = 10 ⇒ OH = 5

2. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=10\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\left(\underbrace{\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OH}}_{\overrightarrow{HM}}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{HM}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{HM}$

E est la droite perpendiculaire à (OA) en H.

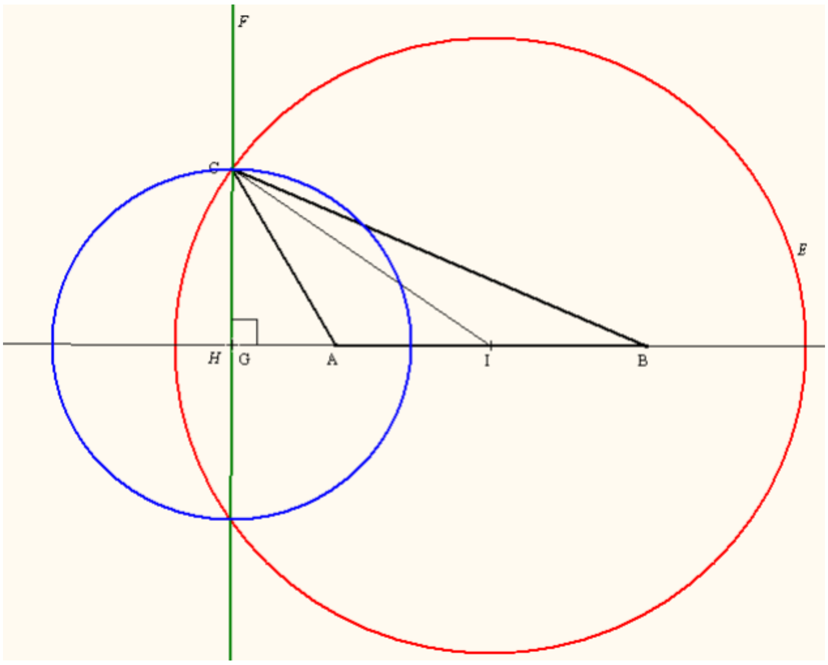
Exercice n°10 :

AB = 6, AC = 4 et $BC=2\sqrt{19}$.

1. a) D'après la formule d'El Kashy, on a :

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\hat{BAC}\Rightarrow\cos\hat{BAC}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}=\frac{36+16-76}{48}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ \hat{BAC}=\frac{2\pi}{3}\text{rd}$$



b) D'après la formule de la médiane, on a :

$$CA^2+CB^2=2CI^2+\frac{AB^2}{2}\Rightarrow CI^2=\frac{CA^2+CB^2-\frac{AB^2}{2}}{2}=\frac{16+76-18}{2}=37\Rightarrow CI=\sqrt{37}$$

2. a) $E=\{M\in P\,/\,MA^2+MB^2=92\}$

$M\in E\Leftrightarrow MA^2+MB^2=92\Leftrightarrow\ 2MI^2+\frac{AB^2}{2}=92\Leftrightarrow MI^2=\frac{92-18}{2}=37\ \Leftrightarrow IM=\sqrt{37}$

$\Leftrightarrow M\in\zeta_{(I,\ \sqrt{37})}$

Ainsi E est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{37}$ (puisque IC = $\sqrt{37}\ \Rightarrow C\in E$).

b) $F=\{M\in P\,/\,MA^2-MB^2=-60\}$

$CA^2-CB^2=-60\Rightarrow C\in F$.

$M\in F\Leftrightarrow MA^2-MB^2=-60\Leftrightarrow 2\overline{IM}\cdot\overline{AB}=-60\ \Leftrightarrow\ \overline{IM}\cdot\overline{AB}=-30$

Soit H le point de la droite (AB) tel que $\overline{IH}\cdot\overline{AB}=-30$

F est la droite perpendiculaire à (AB) en H, ou F est la perpendiculaire à (AB) passant par C.

c) $\Gamma=\{M\in P\,/\,MB^2-4MA^2=12\}$

Soit G le barycentre des points pondérés (B, 1) et (A, - 4)

$\overline{GB}-4\overline{GA}=\vec{0}$

$M\in\Gamma\Leftrightarrow MB^2-4\,MB^2=12$

$$\Leftrightarrow\left(\overline{MG}+\overline{GB}\right)^2-4\left(\overline{MG}+\overline{GA}\right)^2=12\Leftrightarrow -3MG^2+2\overline{MG}\cdot\left(\underbrace{\overline{GB}-4\overline{GA}}_{\vec{0}}\right)+GB^2-4GA^2=12$$

$\Leftrightarrow -3MG^2+GB^2-4GA^2=12$

Or $\overline{BG}=\frac{4}{3}\overline{BA}\Rightarrow BG=\frac{4}{3}\times 6=8$ et $\overline{AG}=-\frac{1}{3}\overline{AB}\Rightarrow AG=\frac{1}{3}\times 6=2$

$M\in\Gamma\Leftrightarrow -3\,MG^2+64-16=12\Leftrightarrow 3MG^2=36\Leftrightarrow MG^2=12\Leftrightarrow GM=2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow M\in\zeta(G,\ 2\sqrt{3})$

Remarque : $C\in\Gamma$ car $CB^2-4CA^2=12\Rightarrow\Gamma$ est le cercle de centre G et passant par C