

TD-PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$
Etude analytique -Applications : cercle

Exercice1 : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$A(1; -3)$ et $B(3; 7)$ et $C(-3; 1)$

- 1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C
- 2) Calculer la surface du triangle ABC

Exercice2 : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$A(5; 0)$ et $B(2; 1)$ et $C(6; 3)$

- 1) Calculer $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$
- 2) en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Exercice3 : déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A(0; 1)$ et qui admet $\vec{n}(2; 1)$ comme vecteur normal

Exercice4 : donner un vecteur normal a la droite (D) dans les cas suivants : 1) $(D): x - 2y + 5 = 0$

2) $(D): 2y - 3 = 0$ 3) $(D): x - 1 = 0$

Exercice5 : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$A(-3; 0)$ et $B(3; 0)$ et $C(1; 5)$

- 1) déterminer une équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à la droite (AB) passant par C
- 2) déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) parallèle à la droite (AB) passant par C

Exercice6 : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points $A(1; 2)$ et $B(-2; 3)$ et $C(0; 4)$

- 1) déterminer une équation cartésienne

de la droite (D) médiatrice du segment $[AB]$

- 2) déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Exercice7 : $(D): 2x + 3y - 1 = 0$ et

$(D'): \frac{3}{2}x - y + 4 = 0$

Etudier la position relative de (D) et (D')

Exercice8 : Soient la droite (D) d'équation :

$(D): 3x + 4y + 5 = 0$

- 1) Déterminer les coordonnées du point H la projection orthogonale de O sur (D)
- 2) calculer La distance du point O à la droite (D)
- 3) Déterminer les coordonnées du point O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Exercice9 : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$A(1; -1)$ et $B(4; -1)$ et $C(-2; 2)$

- 1) Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$
- 2) en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$
- 3) Calculer la surface du triangle ABC
- 4) déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A
- 5) déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Exercice10 : déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1; 2)$ et de rayon $r = 3$

Exercice11 : Déterminer L'ensemble (E) dans les cas suivants :

1) $(E): x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$

2) $(E): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$

3) $(E): x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0$

Exercice12 : Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1; 2)$ et $B(-3; 1)$

Exercice13 : le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. Soient les points

$$A(2;3) \quad B(0;1); \quad C(-4;5); \quad E(5;2) \text{ et } F(2;4)$$

1)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC .

2)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF

Exercice14: résoudre graphiquement le système :

$$(S) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} < 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4 > 0 \end{cases}$$

Exercice15 : résoudre graphiquement le système :

$$(S) \begin{cases} (1): x^2 + y^2 - 4x < 0 \\ (2): x - y - 1 > 0 \end{cases}$$

Exercice16 : Etudier la position du cercle de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 2$ avec la droite d'équation

$$(D): x + y + 2 = 0$$

Exercice17 : Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 2$ avec la droite d'équation $(D): x - y + 2 = 0$

Exercice18 : Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 1$ avec la droite d'équation $(D): y = 3$

Exercice19 : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \quad (1)$$

1)Vérifier que $A(0;1) \in (\mathcal{C})$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A .

Exercice20 : Déterminer l'équation paramétrique du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$ avec $(\theta \in \mathbb{R})$

Exercice21 : Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points

$M(x; y)$ du plan tel que :

$$\begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

Exercice22 : le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points

$M(x; y)$ du plan tel que : $\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$ avec $(\theta \in \mathbb{R})$

1) montrer que $(\mathcal{C})$ est le cercle $(\mathcal{C})$ dont on déterminera de centre Ω et de rayon R et une équation cartésienne

2) soit le point $A(-1;0)$; montrer que A est à

l'extérieur du cercle $(\mathcal{C})$ et déterminer les équations

des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A

3) déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ et qui sont parallèles à la droite :

$$(D) : 3x - 4y = 0$$

4)a) soit la droite (Δ) d'équation : $y = x$

Montrer que (Δ) coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en deux points à déterminer

4)b) déterminer graphiquement l'ensemble des points

$M(x; y)$ du plan tel que : $\frac{x^2 + y^2}{4} \leq x \leq y$

Exercice23: le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère

$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. Soient les points

$$A(3;4) \quad B(4;1); \quad C(2;-3)$$

1)montrer que les points A ; B et C sont non alignés

2)Ecrire l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ passant par A ; B et C

Exercice 24: le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère

$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. $(\mathcal{C}_m)$ l'ensemble des points

$M(x; y)$ du plan tel que :

$$(\mathcal{C}_m): x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0 \text{ avec } m \text{ Paramètre réel}$$

1)déterminer l'ensemble $(\mathcal{C}_1)$

2) a)montrer que $\forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$ $(\mathcal{C}_m)$ est un cercle dont déterminera le centre Ω_m et de rayon R_m

2) b) déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) b) montrer que tous les cercles $(\mathcal{C}_m)$ passent par un point fixe I dont déterminera et tracer $(\mathcal{C}_0); (\mathcal{C}_2); (\mathcal{C}_3)$

3) a) montrer que la droite $(\Delta) : x = 1$ est tangente

A toutes les cercles $(\mathcal{C}_m)$

3) b) soit $m > \frac{-3}{2}$ et $m \neq 1$ et le point $A(0;1)$

Vérifier que A est à l'extérieur des cercles (C_m) et que la droite (AI) n'est pas tangente aux cercles (C_m)

Exercices sans corrections

Exercice1 : Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$

Considérons la droite $(D): 2x - y + 1 = 0$ et N un point sur la droite (D) d'abscisse α .

- 1- Déterminer les coordonnées de N .
- 2- Déterminer la distance ON .
- 3- Déterminer pour quelle valeur de α la distance ON est minimale.

Exercice2: Considérons le triangle ABC où $A(2,1)$, $B(5,0)$ et $C(7,6)$

- 1- a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B .
- b) En déduire les coordonnées du point Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC
- 2) Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité de ABC .
- 3) Déterminer les coordonnées du point H , orthocentre du triangle ABC .
- 4) Vérifier que les points Ω , G et H sont alignés

Exercice 3: Considérons la parabole d'équation :

$(P): y = x^2$ et la droite $(D): y = x - 1$

- 1- Tracer la droite (D) et la parabole (P) .
- 2- Soit N_α un point d'abscisse α et varie sur la parabole (P)
- a) Déterminer en fonction de α la distance $d(N_\alpha, (D))$.
- b) Pour quelle valeur de α la distance $d(N_\alpha, (D))$ est minimale.

Exercice4 : Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et le trinôme $f(x) = (x\vec{u} + \vec{v})^2$

- 1- Développer $f(x)$.
- 2- Déterminer le signe de $f(x)$.
- 3- Déterminer le discriminant de $f(x)$.
- 4- en déduire que pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- 5- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Exercice5 : On sait que pour trois points donnés dans le plan on a : $MA + MB \geq AB$ le but de cette activité c'est de démontrer ce résultat.

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

- 1- Développer $(\vec{u} + \vec{v})^2$
- 2- En utilisant l'inégalité précédente montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
- 3- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Exercice 6 : Déterminer les ensembles :

$$(\Gamma 1) = \{M(x, y) \in (P) / x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0\}$$

$$(\Gamma 2) = \{M(x, y) \in (P) / x^2 + y^2 - x + 2y + 4 = 0\}$$

Exercice7 :

Soient les points $A(-1,0)$, $B(1,2)$ et $C(5, -2)$

- 1- Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés
- 2- Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC .

Exercice8 : Soit (C) le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$$

- 1) Vérifier que le point $A(3, -1)$ appartient au cercle
- 2- Ecrire l'équation de la tangente au cercle (C) en A .

Exercice9: Soient le cercle

$$(C): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 \text{ et } A(5,6)$$

- 1- Vérifier que le point A est à l'extérieur de (C)
- 2- a) Déterminer l'équation de la droite (δ) passant par A et parallèle à l'axe des ordonnées.
- b) Vérifier que (δ) n'est pas tangente à (C) .
- 3- Soit (Δ) une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : $(\Delta) y = mx + p$
- a) Déterminer l'équation de (Δ) en fonction de m uniquement.
- b) Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au Cercle (C) .

4- Soit $B(4,5)$

- a) Montrer que la droite passant par B et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle (C) .
- b) Soit (Δ') une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : $(\Delta') y = mx + p$; Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle (C) .

Exercice10 : Résoudre graphiquement

$$(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9)(2x - y + 1) \leq 0$$

Exercice 11 : Soit l'ensemble :

$$(C_m) = \{M(x, y) \in (P) / x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 4m^2 - 1 = 0\}$$

où m est un réel.

- 1- Montrer que pour tout m dans $\mathbb{R}$, l'ensemble (C_m) est un cercle et déterminer ses éléments.
- 2- Déterminer l'équation cartésienne du plus petit cercle (C_m) .
- 3- Déterminer l'ensemble dans lequel varient les centres Ω_m quand m décrit $\mathbb{R}$
- 4- a) Déterminer pour quelles valeurs de m le point $A(-1,2)$ appartient-il à (C_m)
- b) Soit $M_0(x_0; y_0)$ un point donné dans le plan, existent-ils toujours des réels m qui vérifient $M_0 \in (C_m)$
- 5- Déterminer s'il existe l'intersection de tous les cercles (C_m)

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien**

