

## Exercices corrigés

### Exercice 1 : déterminer le nombre dérivé d'une fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + x$ .

- En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que  $f$  est dérivable en 1 et déterminer  $f'(1)$ .
- Vérifier le résultat sur la calculatrice.

**Solution :**

- Pour tout réel  $h$  non nul, le taux d'accroissement de  $f$  entre 1 et  $1+h$  est :

$$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 + (1+h) - (1^2 + 1)}{h} = \frac{3h + h^2}{h} = 3 + h$$

Or,  $\lim_{h \rightarrow 0} (3 + h) = 3$ . Donc  $f$  est dérivable en 1 et  $f'(1) = 3$ .

Pour trouver la limite de  $\tau(h)$  lorsque  $h$  tend vers 0, on peut souvent remplacer  $h$  par 0 après avoir simplifié l'expression (plus de  $h$  au dénominateur).

TI	Casio
<p>Appuyer sur la touche <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px;">MATH</span> puis <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px;">8</span> (nbreDérivé) :</p> <p style="text-align: center;">nbreDérivé = (X<sup>2</sup> + X, X, 1)</p>	<p>En mode RUN-MATH, utiliser les instructions <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px;">F4</span></p> <p>(MATH) puis <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px;">F4</span> (d/dx) :</p> $\frac{d}{dx}(X^2 + X, 1)$

### Exercice 2 : la même chose, plein de fois

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le nombre dérivé en  $a$  (en utilisant la définition) :

- $f_1(x) = 5x - 3$  et  $a = 1$
- $f_2(x) = 3x^2 + 2x - 1$  et  $a = 2$
- $f_3(x) = \sqrt{x+3}$  et  $a = -1$
- $f_4(x) = \frac{x}{x+1}$  et  $a = -2$

**Solution :**

- Pour tout  $h \neq 0$ , le taux d'accroissement de  $f_1$  entre 1 et  $1+h$  est :  $\tau_1(h) = \frac{f_1(1+h) - f_1(1)}{h}$  (\*)

$$(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = \frac{5(1+h) - 3 - (5 \times 1 - 3)}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = \frac{5h}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = 5$$

Or,  $\lim_{h \rightarrow 0} 5 = 5$ , donc  $f_1$  est dérivable en  $a = 1$  et  $f'_1(1) = 5$ .

- Pour tout  $h \neq 0$ , le taux d'accroissement de  $f_2$  entre 2 et  $2+h$  est :  $\tau_2(h) = \frac{f_2(2+h) - f_2(2)}{h}$  (\*)

$$(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = \frac{3(2+h)^2 + 2(2+h) - 1 - (3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 1)}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = \frac{3h^2 + 14h}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = 3h + 14$$

Or,  $\lim_{h \rightarrow 0} 3h + 14 = 14$ , donc  $f_2$  est dérivable en  $a = 2$  et  $f'_2(2) = 14$ .

- Pour tout  $h \neq 0$ , le taux d'accroissement de  $f_3$  entre  $-1$  et  $-1+h$  est :  $\tau_3(h) = \frac{f_3(-1+h) - f_3(-1)}{h}$  (\*)

$$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \frac{\sqrt{(-1+h)+3} - \sqrt{-1+3}}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}) (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h \times (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \frac{2+h-2}{h \times (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \frac{h}{h \times (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}$$

$$\text{Or, } \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{2+h} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}, \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \tau_3(h) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Par conséquent, } f_3 \text{ est dérivable en } a = -1 \text{ et } f_3'(-1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$4. \text{ Pour tout } h \neq 0, \text{ le taux d'accroissement de } f_4 \text{ entre } -2 \text{ et } -2+h \text{ est : } \tau_4(h) = \frac{f_4(-2+h) - f_4(-2)}{h} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \frac{\frac{-2+h}{-2+h+1} - \frac{-2}{-2+1}}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \frac{\frac{-2+h}{h-1} - \frac{-2}{-1}}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \frac{\frac{-2+h}{h-1} - \frac{-2}{-1}}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \frac{1}{h} \times \frac{-2+h}{h-1} - \frac{2(h-1)}{h-1}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \frac{1}{h} \times \frac{-h}{h-1}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \frac{-1}{h-1}$$

$$\text{Or, } \lim_{h \rightarrow 0} h-1 = -1, \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \tau_4(h) = \frac{-1}{-1} = 1.$$

$$\text{Par conséquent, } f_4 \text{ est dérivable en } a = -2 \text{ et } f_4'(-2) = 1.$$

### Exercice 3 : tangente par le nombre dérivé

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^2 - x$ .

- Déterminer une équation de la tangente ( $\mathcal{T}$ ) à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse 1.
- Vérifier le résultat sur calculatrice.

#### Solution :

- Afin de déterminer une équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse 1, déterminons tout d'abord si  $f$  est dérivable en 1.

– Méthode 1 : Calculons la limite du taux d'accroissement  $\tau$  de  $f$  entre 1 et  $1+h$ . Pour tout  $h \neq 0$  :

$$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2(1+h)^2 - (1+h) - (2 \times 1^2 - 1)}{h} = \frac{2h^2 + 3h}{h} = 2h + 3$$

$$\text{Or, } \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 3) = 3, \text{ donc } f \text{ est dérivable en 1 et } f'(1) = 3.$$

– Méthode 2 : La fonction  $f$  est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout  $x$  réel, on a

$$f'(x) = 2 \times 2x - 1 = 4x - 1$$

$$\text{En particulier, } f \text{ est dérivable en 1 et } f'(1) = 4 \times 1 - 1 = 3.$$

Nous avons donc montré que  $f$  est dérivable en 1 et que  $f'(1) = 3$ . Par conséquent, la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente non verticale, de coefficient directeur  $f'(1) = 3$ . Donc ( $\mathcal{T}$ ) a une équation de la forme :  $y = 3x + p$ .

Or,  $A(1 ; f(1)) \in (\mathcal{T})$ , donc  $y_A = 3x_A + p$  (\*).
















$$(*) \Leftrightarrow f(1) = 3 \times 1 + p$$

$$(*) \Leftrightarrow 2 \times 1^2 - 1 = 3 + p$$

$$(*) \Leftrightarrow 1 - 3 = p$$

$$(*) \Leftrightarrow p = -2$$

La tangente ( $\mathcal{T}$ ) à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A(1 ; f(1))$  a donc pour équation  $y = 3x - 2$ .

TI	Casio
<p>(a) Saisir l'expression de <math>f(x)</math> en Y1</p> <p>(b) Appuyer sur la touche  et choisir l'instruction dessin ( ) puis  (Tangente)</p> <p>(c) Régler la fenêtre d'affichage</p> <p>(d) Préciser la valeur de <math>x</math> en appuyant sur . Valider par . La tangente s'affiche ainsi qu'une équation (éventuellement approchée).</p>	<p>(a) Choisir l'instruction SET UP ( ). Activer le mode Derivative : choisir ON () , suivi de </p> <p>(b) Saisir la fonction en Y1 et tracer la courbe</p> <p>(c) Choisir l'instruction Sketch ( ). Sélectionner Tang ()</p> <p>(d) Appuyer sur  pour sélectionner la valeur de <math>x</math>, puis taper deux fois sur la touche . La tangente s'affiche ainsi qu'une équation (éventuellement approchée).</p>

#### Exercice 4 : Calculer des nombres dérivés à l'aide des formules

Pour les fonctions suivantes, déterminer le nombre dérivé en  $x = 2$  puis en  $x = \frac{1}{2}$  :

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = x^3$
- $h(x) = \frac{1}{x}$
- $i(x) = x^5$
- $j(x) = \sqrt{x}$

**Solution :**

- La fonction  $f$  est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ , on a :

$$f'(x) = 2x$$

Par conséquent,  $f'(2) = 2 \times 2 = 4$  et  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ .

- La fonction  $g$  est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout  $x \in \mathcal{D}_g$ , on a :

$$g'(x) = 3x^2$$

Par conséquent,  $g'(2) = 3 \times 2 = 6$  et  $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ .

- La fonction  $h$  est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout  $x \in \mathcal{D}_h$ , on a :

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Par conséquent,  $h'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$  et  $h'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$ .

- La fonction  $i$  est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout  $x \in \mathcal{D}_i$ , on a :

$$i'(x) = 5x^4$$

Par conséquent,  $i'(2) = 5 \times 2^4 = 80$  et  $i'\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$ .

5. La fonction  $j$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ . Pour tout  $x > 0$ , on a :

$$j'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Par conséquent, } j'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ et } j'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

### Exercice 5 : Tangente en utilisant les formules de dérivation

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ . Soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

- Déterminer une équation de la tangente ( $\mathcal{T}$ ) à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse 1.
- Existe-t-il une tangente à  $\mathcal{C}_f$  parallèle à la droite ( $d$ ) d'équation  $y = 3x - 4$ ?  
Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact.

**Solution :**

- La fonction  $f$  est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 2x$ .  
Par conséquent, la tangente ( $\mathcal{T}$ ) à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse 1 a pour coefficient directeur  $f'(1) = 2$ . Son équation est donc

$$y = 2x + p \text{ avec } p \in \mathbb{R}$$

De plus,  $A(1 ; f(1)) \in (\mathcal{T})$ , donc  $y_A = 2x_A + p$ , c'est-à-dire  $f(1) = 2 \times 1 + p$ , d'où  $p = 1 - 2 = -1$ .  
Donc

$$(\mathcal{T}) : y = 2x - 1$$

- La fonction  $f$  étant dérivable sur  $\mathbb{R}$ , le coefficient directeur de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $x$  est  $f'(x) = 2x$ .  
S'il existe une tangente parallèle à la droite ( $d$ ) alors son coefficient directeur est le même que ( $d$ ), c'est-à-dire 3. On cherche donc un réel  $x$  tel que

$$f'(x) = 3 \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow 2x = 3$$

$$(*) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Donc  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente parallèle à ( $d$ ) au point  $M\left(\frac{3}{2}; f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$  soit  $M\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$ .

### Exercice 6 : encore une tangente avec un joli calcul de dérivée

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$ . On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

- Quel est l'ensemble de définition de  $f$ ?
- Déterminer une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse 1.
- Vérifier le résultat sur calculatrice.

**Solution :**

- Pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 1 \neq 0$ , donc  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

- La fonction  $f$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec  $u(x) = 2x - 3$  et  $v(x) = x^2 + 1$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont des fonctions polynômes, elles sont donc dérivables sur leur ensemble de définition  $\mathbb{R}$ . On a alors, pour tout réel  $x$  :

$$u'(x) = 2 \text{ et } v'(x) = 2x.$$

De plus, la fonction  $v$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout réel  $x$  :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)} = \frac{2(x^2+1) - (2x-3) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+6x+2}{(x^2+1)^2}$$

La fonction  $f$  est donc dérivable en  $a = 1$  et  $f'(1) = \frac{-2 \times 1^2 + 6 \times 1 + 2}{(1^2 + 1)^2} = \frac{3}{2}$ .

Le coefficient directeur de la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse 1 est donc  $f'(1) = \frac{3}{2}$ .

Donc  $\mathcal{T}$  a pour équation  $y = \frac{3}{2}x + p$  où  $p \in \mathbb{R}$ .

De plus,  $A(1; f(1)) \in \mathcal{T}$ , donc  $y_A = \frac{3}{2}x_A + p$ , soit  $\frac{-1}{2} = \frac{3}{2} + p$ , donc  $p = -2$ .

D'où

$$\mathcal{T} : y = \frac{3}{2}x - 2$$

3. Voir l'exercice sur la tangente via le nombre dérivé (exercice 3).

### Exercice 7 : tangente sans l'expression de la fonction

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative d'une fonction  $f$  dérivable en 3. On sait que  $f(3) = -2$  et  $f'(3) = 0,5$ . Déterminer une équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 3.

**Solution :**

La fonction  $f$  est dérivable en 3, donc la tangente ( $T$ ) à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 3 a pour équation  $y = f'(3)x + p = 0,5x + p$ , avec  $p \in \mathbb{R}$ .

Or,  $f(3) = -2$ , donc la tangente passe par le point  $A(3 ; -2)$ . Par conséquent,  $y_A = 0,5x_A + p$ , soit  $-2 = 0,5 \times 3 + p$ , d'où  $p = -\frac{7}{2}$ .

La tangente ( $T$ ) a donc pour équation  $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$ .

### Exercice 8 : autour du nombre dérivé

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ .

1. Calculer  $f'(9)$  et  $f'(3)$ .
2. Existe-t-il des valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f'(x) = 2$  ?
3. Existe-t-il des valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f'(x) = -1$  ?

**Solution :**

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Par conséquent,  $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$  et  $f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

2. Pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$ .

Il existe donc un unique réel tel que  $f'(x) = 2$  :  $x = \frac{1}{16}$ .

3. Pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = -1$ . Or, pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ . Par conséquent, il n'existe pas de réel  $x$  tel que  $f'(x) = -1$ .

### Exercice 9 : Tangente et second degré (que du bonheur !)

Soit  $f$  la fonction trinôme définie par  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . On note  $\mathcal{P}$  sa courbe représentative. On sait que  $f(0) = 2$  ;  $f(-1) = 5$  et  $f'(-1) = 2$ .

1. Montrer que les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont solution d'un système de trois équations à trois inconnues. Résoudre ce système.
2. Déterminer une équation de la tangente à  $\mathcal{P}$  au point d'abscisse  $-1$ .

**Solution :**

1.  $f(0) = 2 \Leftrightarrow a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2$ .

$f(-1) = 5 \Leftrightarrow a - b + c = 5 \Leftrightarrow a - b = 5 - c \Leftrightarrow a - b = 3$ .

La fonction  $f$  est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 2ax + b$ . Donc :

$f'(-1) = 2 \Leftrightarrow 2a(-1) + b = 2 \Leftrightarrow -2a + b = 2$ .

Nous devons alors résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ -2a + b = 2 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} a = 3 + b \\ -2(3 + b) + b = 2 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a = 3 + b \\ b = -8 \end{cases}$$

Par conséquent,  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -5x^2 - 8x + 2$ .

Vérifications :

(a)  $f(0) = 2$

(b)  $f(-1) = -5 + 8 + 2 = 5$

(c)  $f'(-1) = -10 \times (-1) - 8 = 2$

2.  $f$  est dérivable en  $-1$  et  $f(-1) = 2$ . Donc la tangente à  $\mathcal{P}$  au point d'abscisse  $-1$  a pour équation  $y = 2x + p$ , avec  $p \in \mathbb{R}$ .

De plus, cette tangente passe par le point  $A(1 ; f(1))$ , donc  $f(1) = 2 + p$ , soit  $-5 - 8 + 2 = 2 + p$ , d'où  $p = -13$ .  
La tangente à  $\mathcal{P}$  au point d'abscisse  $-1$  a donc pour équation  $y = 2x - 13$ .