Exercice 1 :

1. Déterminer la parité des nombres suivants :

   $A=(n+3)(n+4)+5$ $\quad$ $B=3^{2015}+4^{2016}$

   $C=3n^2+n$ $\quad$ $D=(n+7)+(n+8)$

2. a , b et c trois nombres consécutifs
   déterminer la parité de a+b+c et ac.

Exercice2: soit n et k deux entiers naturels.

1. Montrer que si $n=5k+1$ alors n^2-1 est divisible par 5.
2. Montrer que si $n=5k+2$ alors n^2+1 est divisible par 5.
3. Montrer que la somme de cinq nombres entiers consécutifs est un multiple de 5.
4. Montrer que la somme de trois nombres pairs consécutifs est un multiple de 6.
5. Montrer que la somme de trois nombres impairs consécutifs est un multiple de 3.
6. n , m et k trois entiers naturels,
   montrer que si $3n+2m$ et $7n+5m$ sont deux multiples de k alors n est multiple de k.

Exercice3 :

1. Sans calculer, les nombres suivants sont ils premiers ?

   $A=49\times11+7$ $\quad$ $B=5\times2\times7+24$ $\quad$ $C=33+11\times7$

2. 17^2 est il premier ? même question pour 317.

Exercice4:

1. On pose $A=5^{n+2}-5^n$ avec $n\in\mathbb{N}$

   Ecrire A sous forme d'un produit de facteurs premiers puis montrer qu'il est divisible par 6

2. On pose $B=3^{n+3}+3^n$ avec $n\in\mathbb{N}$

   Ecrire B sous forme d'un produit de facteurs premiers puis montrer qu'il est divisible par 14.

Exercice5:

1. Développer le produit $E=(n+1)^2-n^2$
2. En déduire que E est un entier impair pour tout n de $\mathbb{N}$
3. Ecrire les entiers suivants comme différence des carrés de deux entiers naturels consécutifs
   17 , 45 et 101 .

Exercice1 : (correction)

1. Le nombre $A=(n+3)(n+4)+5$ est impair car $(n+3)(n+4)$ est pair (produit de deux nombres consécutifs) et 5 impair.
   Le nombre $B=3^{2015}+4^{2016}$ est impair (somme de deux nombres de différente parité).
   Le nombre $C=3n^2+n$ est car $C=3n^2+n=n(n+1)+2n^2$ somme de deux nombres pairs.
   Le nombre $D=(n+7)+(n+8)$ est impair (somme de deux nombres de consécutifs).
2. a , b et c trois nombres consécutifs
   Si a est pair alors a+b+c est impair
   Si a est impair alors a+b+c est pair
   Si a est pair alors ac est pair (produit de deux nombres de même parité).
   Si a est impair alors ac est impair (produit de deux nombres de même parité).

Exercice2: (correction) soit n et k deux entiers naturels.

1. supposons que $n=5k+1$ alors $n^2+1=(5k+1)^2-1=25k^2+10k+1-1=5(5k^2+2k)$
   donc divisible par 5.
2. supposons que si $n=5k+2$ alors $n^2+1=(5k+2)^2+1=25k^2+20k+4+1=5(5k^2+4k+1)$
   donc divisible par 5.
3. (n) ; (n+1) , (n+2) ,(n+3) et (n+4) sont cinq nombres entiers consécutifs
   et on a $(n)+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10=5(n+2)$
   donc c' est un multiple de 5.
4. (2n) , (2n+2) et (2n+4) sont trois nombres pairs consécutifs
   et on a $(2n)+(2n+2)+(2n+4)=6n+6=6(n+1)$ donc c'est un multiple de 6.
5. (2n+1) , (2n+3)et (2n+5) sont trois nombres impairs consécutifs
   et on a $(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=6n+9=3(2n+3)$ donc c'est un multiple de 3.
6. n , m et k trois entiers naturels,
   supposons que $3n+2m$ et $7n+5m$ sont deux multiples de k
   alors $3n+2m=kp$ et $7n+5m=kq$
   $\begin{cases} 5\times & 3n+2m & = & kp \\ -2\times & 7n+5m & = & kq \end{cases}$ donc $\begin{cases} 15n+10m & = & 5kp \\ -14n+-10m & = & -2kq \end{cases}$
   d'où $n=5kp-2kq=k(5p-2q)$ doc n est multiple de k.

Exercice3 : (correction)

1. $A=49\times 11+7$ n'est pas premier car il est divisible par 7
   $B=5\times 2\times 7+24$ n'est pas premier car il est divisible par 2
   $C=33+11\times 7$ n'est pas premier car il est divisible par 11
2. 17^2 n'est pas premier car il est divisible par 17
   Les nombres premiers inferieurs à $\sqrt{317}$ sont : 2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 et 17
   ils ne divisent pas 317 donc il est premier.

Exercice4: (correction)

1. On pose $A=5^{n+2}-5^n$ avec $n\in\mathbb{N}$
   On a $A=5^{n+2}-5^n=5^n(5^2-1)=5^n(25-1)=5^n\times 24=5^n\times 2^3\times 3$

Donc $A = 5^n \times 2^3 \times 3 = 6 \times (5^n \times 2^2)$ donc divisible par 6.

2. On pose $B = 3^{n+3} + 3^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

   $B = 3^{n+3} + 3^n = 3^n(3^3 + 1) = 3^n \times 28 = 3^3 \times 2^2 \times 7$

   On a $B = 3^3 \times 2^2 \times 7 = 14 \times (3^n \times 2)$ donc divisible par 14.

Exercice5: (correction)

1. On a $E = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
2. On a $E = 2n+1$ donc E est un entier impair pour tout n de $\mathbb{N}$
3. D'après la première question :

   $17 = 2 \times 8 + 1 = 9^2 - 8^2$

   $45 = 2 \times 22 + 1 = 23^2 - 22^2$.

   $101 = 2 \times 50 + 1 = 51^2 - 50^2$