

~ Tronc Commun ~
L'ensemble des entiers naturels
Notions sur l'arithmétique

Exercice 1 :

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que le nombre $n(n+1)$ est pair.
2. Déterminer la parité des nombres suivants :

$$a = 2n^2 + 13 \quad , \quad b = n^3 - n$$
$$c = (2n+1)^7 \quad , \quad d = n^2 + 3n + 1$$

Exercice 2 :

Etudier la parité des nombres :

$$2^9 + 6^9 ; 17^3 - 5^3 ; 351 \times 208 ; 37013 \times 1375$$

Exercice 3 :

Soit n un entier naturel

Etudier la parité des nombres :

$$12n+8 ; 2n+5 ; 4n+6 ; 8n-7 \quad (\text{avec } n \geq 1) ; 6n+3 ; 2n^2+8n+11 ; n^2+n+2006 ;$$
$$n^3-n+2$$

Exercice 4 :

1. Déterminer les diviseurs des nombres : 18,38,75 et 60.
2. Déterminer cinq multiples de 3,5,7,11,15.

Exercice 5 :

Mettez \times dans la case qui convient :

les nombres \ divisible	par 2	Par 3	Par 4	Par 5	Par 9
7524					
2805					
9360					
5005005					
91328					
1010001					

Exercice 6 :

Soient n et a deux entiers naturels non nuls.

On pose $S = (a+1) + (a+2) + \dots + (a+n)$

1. Montrer que $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. Montrer que n divise le nombre $S - \frac{n(n+1)}{2}$
3. Montrer que si n est impair alors S est divisible par n .

Exercice 7 :

Déterminer tous les nombres entiers naturels compris entre 202 et 299 qui sont divisibles par 3 et par 5.

Exercice 8 :

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$

On pose $A = n^4 - 1$

1. Montrer que $n-1$, $n+1$ et n^2+1 sont des diviseurs du nombre A
2. Déterminer quatre autres diviseurs du nombre A .

Exercice 9 :

Soient x et y deux entiers naturels.

On pose $A = (x + 2y)^2 - x^2$

1. Montrer que $A \in \mathbb{N}$
2. Montrer que A est pair.
3. Montrer que A est divisible par 4

Exercice 10 :

1. Déterminer les multiples du nombre 8 inférieurs à 76
2. Même question pour le nombre 7

Exercice 11 :

1. Donner les quotients de la division euclidienne de chacun des nombres :
 $544 - 272 - 136 - 68 - 34$ par 2
2. En déduire la valeur du nombre entier naturel n tel que : $544 = 2^n \times 17$

Exercice 12 :

Déterminer les entiers naturels a, b et c pour que :

- a) $23a4$ est divisible par 3
- b) $23a4$ est divisible par 3 et n'est pas divisible par 9

c) $23b5c$ est divisible par 3 et 5

Exercice 13 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 tel que $n-3$ est multiple de 4.
Montrer que le nombre $n^2 + 6n + 5$ est multiple de 16

Exercice 14 :

Soit p un nombre premier tel que $p > 2$

1. Montrer que $p^2 - 1$ est multiple de 8
2. En déduire que 16 divise $p^4 - 1$

Exercice 15 :

On considère les deux nombres $x = 1500$ et $y = 840$

1. Décomposer les nombres x et y en facteurs premiers.
2. Déterminer $x \wedge y$ et $x \vee y$.
3. Simplifier les nombres \sqrt{x} et $\frac{x}{y}$

Exercice 16 :

Déterminer tous les valeurs possibles de l'entier naturel n tel que $\frac{n+13}{n+3}$ soit un nombre entier naturel.

Exercice 17 :

Soit n un entier naturel

1. a) Développer le nombre : $(n+1)^2 - n^2$
b) En déduire que tout entier naturel impair est la différence des carrés de deux nombres consécutifs.
2. Appliquer le résultat obtenu pour les nombres 19, 47, 53

Exercice 18 :

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$: $(n+1) \wedge (n+2) = 1$

Exercice 19 :

1. Trouver toutes les solutions de l'équation : (1): $x^2 - y^2 = 51$ dans \mathbb{N}^2
2. Déterminer les couples (a, b) des entiers naturels tels que : (S): $\begin{cases} a^2 - b^2 = 7344 \\ a \wedge b = 12 \end{cases}$

Exercice 20 :

Soit n un entier naturel

On pose $a = 5^{n+2} - 5^n$ et $b = 7^{n+2} - 7^n$

Déterminer $a \wedge b$ et $a \vee b$

Exercice 21 :

1. Est-ce que le nombre 2017 est premier ?
2. Est-ce que le nombre 27000001 est premier ?

Corrigé de l'exercice 1

1. Soit n un entier naturel non nul

1^{er} cas : Si n est pair :

$$\text{alors } n = 2k \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{donc } n + 1 = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

et par suite

$$\begin{aligned} n(n+1) &= 2k(2k+1) \\ &= 2(2k^2+k) \\ &= 2k' \quad (k' = 2k^2+k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

2^{ème} cas : Si n est impair :

$$\text{alors } n = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{donc } n + 1 = 2k + 1 + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1) \quad (k \in \mathbb{N})$$

et par suite

$$\begin{aligned} n(n+1) &= (2k+1).2(k+1) \\ &= 2 \times ((2k+1).(k+1)) \\ &= 2 \times (2k^2+3k+1) \\ &= 2.k'' \quad (k'' = 2k^2+3k+1 \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.

$$\checkmark \quad a = 2n^2 + 13$$

Puisque $2n^2$ est pair et 13 est impair alors a est impair

$$\checkmark \quad b = n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$$

(On sait que d'après le résultat de la question 1 que le produit de deux nombres consécutifs est pair)

$n(n+1)$ est pair donc $n(n+1)(n-1)$ est pair

càd $b = n^3 - n$ est pair

$$\checkmark \quad c = (2n+1)^7$$

On sait que $(2n+1)$ est impair, càd $(2n+1)^7$ est impair

Donc le nombre c est impair.

✓

$$\begin{aligned}d &= n^2 + 3n + 1 \\ &= n^2 + n + 2n + 1 \\ &= n(n + 1) + 2n + 1\end{aligned}$$

Puisque $n(n + 1)$ est pair et $2n + 1$ est impair

Donc $n(n + 1) + 2n + 1$ est impair

D'où d est impair.

Corrigé de l'exercice 2

- ✓ On a 2 est pair donc 2^9 est pair
Et on a 6 est pair donc 6^9 est pair
Et par suite $2^9 + 6^9$ est pair.
- ✓ On a 17 est impair donc 17^3 est impair
Et on a 5 est impair donc 5^3 est impair
Et par suite $17^3 - 5^3$ est pair.
- ✓ On a 351 est impair donc
Et on a 208 est pair
Et par suite 351×208 est pair.
- ✓ On a 37013 est impair
Et on a 1375 est impair
Et par suite 37013×1375 est impair

Corrigé de l'exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$

- ✓ On a $12n + 8 = 2 \times (6n + 4) = 2 \times k$ ($k = 6n + 4 \in \mathbb{N}$) donc $12n + 8$ est pair.
- ✓ On a $2n + 5 = 2n + 4 + 1 = 2(n + 2) + 1 = 2k + 1$ ($k = n + 2 \in \mathbb{N}$) donc $2n + 5$ est impair.
- ✓ On a $4n + 6 = 2 \times (2n + 3) = 2 \times k$ ($k = 2n + 3 \in \mathbb{N}$) donc $4n + 6$ est pair.
- ✓ On a $8n - 7 = 8n - 8 + 1 = 2(4n - 4) + 1 = 2k + 1$ ($k = 4n - 4 \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 1$) donc $8n - 7$ est impair.
- ✓ On a $6n + 3 = 3 \times (2n + 1)$ donc $6n + 3$ est impair (produit de deux nombres impairs).

- ✓ On a $2n^2 + 8n + 11 = 2n^2 + 8n + 10 + 1 = 2(n^2 + 4n + 5) + 1 = 2k + 1$ ($k = n^2 + 4n + 5 \in \mathbb{N}$)
donc $2n^2 + 8n + 11$ est impair.
- ✓ On a $n^2 + n + 2006 = n(n+1) + 2006$
- ▶ $n(n+1)$ est pair (produit de deux nombres consécutifs)
 - ▶ 2006 est pair.
- Donc $n^2 + n + 2006$ est pair (somme de deux nombres pairs)
- ✓ On a $n^3 - n + 2 = n(n^2 - 1) + 2 = \underbrace{n(n+1)}_{\text{pair}} \times (n-1) + \underbrace{2}_{\text{pair}}$ donc $n^3 - n + 2$ est pair.

Corrigé de l'exercice 4

1. Les diviseurs de 18 sont : $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.
Les diviseurs de 38 sont : $\{1, 2, 19, 38\}$.
Les diviseurs de 75 sont : $\{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$.
Les diviseurs de 60 sont : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 18, 30, 60\}$.
2. Les cinq multiples de 3 sont : $\{3, 6, 9, 12, 15\}$.
Les cinq multiples de 5 sont : $\{5, 10, 15, 20, 25\}$.
Les cinq multiples de 7 sont : $\{7, 14, 21, 28, 35\}$.
Les cinq multiples de 11 sont : $\{11, 22, 33, 44, 55\}$.
Les cinq multiples de 15 sont : $\{15, 30, 45, 60, 75\}$.

Corrigé de l'exercice 5

les nombres \ divisible	par 2	Par 3	Par 4	Par 5	Par 9
7524	×	×	×		×
2805		×		×	
9360	×	×	×	×	×
5005005		×		×	
91328	×		×		
1010001		×			

Corrigé de l'exercice 6

1. Montrons que : $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

On pose $A = 1+2+\dots+n$

On peut écrire A sous la forme : $A = n+(n-1)+\dots+2+1$

Donc $A+A = (1+n)+(2+n-1)+\dots+(n+1)$

Donc $2A = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)}_{n \text{ fois}} = n(n+1)$

Et par suite $A = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Montrons que n divise le nombre $S - \frac{n(n+1)}{2}$

On a $S - \frac{n(n+1)}{2} = na + (1+2+\dots+n) - \frac{n(n+1)}{2}$ c -à -d $S - \frac{n(n+1)}{2} = n \times a$

Donc n divise le nombre $S - \frac{n(n+1)}{2}$.

3. Montrons que si n est impair alors S est divisible par n

Si n est impair alors $(n+1)$ est pair c -à -d $(n+1) = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

Donc $\frac{n(n+1)}{2} = k \times n$ et comme $S - \frac{n(n+1)}{2} = n \times a$ alors $S = n(a-k)$

Et par suite S est divisible par n .

Corrigé de l'exercice 7

- Les nombres entiers naturels qui répondent à la question sont ceux dont la somme de leurs chiffres est divisible par 3 et dont les chiffres des dizaines sont 0 ou 5.
- Les nombres divisibles par 5 sont :
205 210 215 220 225 230 235 240 245 250
255 260 265 270 275 280 285 290 295
- Les nombres divisibles par 3 parmi la liste précédente sont :
210 225 240
255 270 285

Corrigé de l'exercice 8

1. On a $A = n^4 - 1 = (n^2)^2 - (1)^2 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$

Donc $n - 1$, $n + 1$ et $n^2 + 1$ sont des diviseurs du nombre A

2. On a $A = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$

Donc : 1 , A , $(n - 1)(n^2 + 1)$, $(n + 1)(n^2 + 1)$ sont des diviseurs du nombre A .

Corrigé de l'exercice 9

1. Montrons que $A \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned} A &= (x + 2y)^2 - x^2 \\ &= (x + 2y + x)(x + 2y - x) \\ &= 2y(2x + 2y) \\ &= 4y(x + y) \end{aligned}$$

On a $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ donc $4y(x + y) \in \mathbb{N}$

Et par suite $A \in \mathbb{N}$

2. Montrons que A est pair

On a $A = 4y(x + y)$ c-à-d $A = 2 \times [2y(x + y)]$

Donc A est pair

3. Montrons que A est divisible par 4

On a $A = 4 \times [y(x + y)]$

Donc A est divisible par 4.

Corrigé de l'exercice 10

1. On pose $a = 8k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Et on cherche k de tel façon $0 \leq a \leq 76$

Donc $0 \leq 8k \leq 76$

Donc $0 \leq k \leq \frac{76}{8}$

Donc $0 \leq k \leq \frac{19}{2}$

Donc $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

D'où les multiples de 8 inférieurs à 76 sont : $\{0,8,16,24,32,40,48,56,64,72\}$

2. De la même façon on a les multiples de 7 inférieurs à 76 sont :
 $\{0,7,14,21,28,35,42,49,56,63,70\}$

Corrigé de l'exercice 11 :

1. On a :

$$544 = 2 \times 272$$

$$272 = 2 \times 136$$

$$136 = 2 \times 68$$

$$68 = 2 \times 34$$

$$34 = 2 \times 17$$

2. On a :

$$\begin{aligned} 544 &= 2 \times 272 \\ &= 2 \times (2 \times 136) \\ &= 2 \times 2 \times (2 \times 68) \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times (2 \times 34) \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times (2 \times 17) \\ &= 2^5 \times 17 \end{aligned}$$

Donc : $n = 5$

Corrigé de l'exercice 12

- a) $23a4$ est divisible par 3 si et seulement si $2+3+a+4$ est divisible par 3
c -à -d $9+a$ est divisible par 3
et par suite $a \in \{0,3,6,9\}$
- b) $23a4$ est divisible par 3 et n'est pas divisible par 9 si et seulement si $a \in \{3,6\}$
- c) $23b5c$ est divisible par 3 et 5 si et seulement si $2+3+b+5+c = 10+b+c$ est divisible par 3 et $c \in \{0,5\}$
- ▶ Si $c = 0$: alors $10+b$ est divisible par 3 donc $b \in \{2,5,8\}$
 - ▶ Si $c = 5$: alors $15+b$ est divisible par 3 donc $b \in \{0,3,6,9\}$
- Donc $(b,c) \in \{(2,0);(5,0);(8,0);(0,5);(3,5);(6,5);(9,5)\}$

Corrigé de l'exercice 13

On sait que : $n \geq 3$ et $n-3$ est multiple de 4

Donc il existe un entier naturel k tel que : $n-3=4k$

Donc : $n=3+4k$

Par suite :

$$\begin{aligned}n^2 + 6n + 5 &= (3+4k)^2 + 6(3+4k) + 5 \\ &= 9 + 24k + 16k^2 + 18 + 24k + 5 \\ &= 16k^2 + 48k + 32 \quad (k' = k^2 + 3k + 2 \in \mathbb{N}) \\ &= 16(k^2 + 3k + 2) \\ &= 16k'\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Corrigé de l'exercice 14

1. On a p est un nombre premier tel que $p > 2$ donc p est impair

p s'écrit sous la forme $p = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

Donc

$$\begin{aligned}p^2 - 1 &= (2k + 1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k \\ &= 4 \times \underbrace{k(k+1)}_{\text{pair}} \\ &= 4 \times 2k' = 8 \times k'\end{aligned}$$

Donc $p^2 - 1$ est multiple de 8

2. On a :

$$p^2 - 1 = 8k'$$

Et puisque p est impair donc il est clair que $p^2 + 1$ est pair donc $p^2 + 1 = 2k''$

Et par suite $p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = 8k' \times 2k'' = 16 \times (k'k'')$

D'où 16 divise $p^4 - 1$.

Corrigé de l'exercice 15

1.

1500	2	840	2
750	2	420	2
375	3	210	2
125	5	105	3
25	5	35	5
5	5	7	7
1		1	

$$x = 2^2 \times 3^1 \times 5^3$$
$$y = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$$

2. On a : $x \wedge y = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60$ et $x \vee y = 2^3 \times 3^1 \times 5^3 \times 7^1 = 21000$

3. On a : $\sqrt{x} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 5^3} = 2 \times 5 \times \sqrt{3 \times 5} = 10\sqrt{15}$ et $\frac{x}{y} = \frac{2^2 \times 3^1 \times 5^3}{2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1} = \frac{5^2}{2 \times 7} = \frac{25}{14}$

Corrigé de l'exercice 16

Remarquons que : $\frac{n+13}{n+3} = \frac{n+3+10}{n+3} = 1 + \frac{10}{n+3}$

Donc $n+13$ est divisible par $n+3$ veut dire que $n+3$ divise 10

Puisque 1,2,5,10 sont les diviseurs de 10, alors :

$$n+3=1 \text{ ou } n+3=2 \text{ ou } n+3=5 \text{ ou } n+3=10$$

$$\text{Donc } n=-2 \text{ ou } n=-1 \text{ ou } n=2 \text{ ou } n=7$$

Et puisque $n \in \mathbb{N}$ alors $n=2$ ou $n=7$.

Corrigé de l'exercice 17

1. a) On a : $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$.

Le nombre $2n+1$ est impair

b) soit x un entier naturel impair, donc il existe un entier naturel n tel que : $x = 2n + 1$,
et d'après le résultat de la première question a), on a : $x = 2n + 1 = (n+1)^2 - n^2$

d'où le résultat.

2.

► $19 = 2 \times 9 + 1 = (9+1)^2 - 9^2 = 10^2 - 9^2$

▶ $47 = 2 \times 23 + 1 = (23 + 1)^2 - 23^2 = 24^2 - 23^2$

▶ $53 = 2 \times 26 + 1 = (26 + 1)^2 - 26^2 = 27^2 - 26^2$

Corrigé de l'exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}$

Posons $d = (n+1) \wedge (n+2)$

On a d divise $(n+2)$ et d divise $(n+1)$

Donc d divise $(n+2) - (n+1)$

Donc d divise 1

Et puisque $d \in \mathbb{N}^*$ alors $d = 1$

Rq. : $(n+1)$ et $(n+2)$ sont deux nombres entiers consécutifs donc $(n+1) \wedge (n+2) = 1$

Corrigé de l'exercice 19

1. L'équation (1) équivaut à $(x+y)(x-y) = 51$

Ça veut dire que $(x-y)$ et $(x+y)$ sont les diviseurs de 51

On a 1, 3, 17 et 51 sont les diviseurs de 51.

Donc on a possibilités suivantes :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 51 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = 51 \\ x + y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 17 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = 17 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x = 26 \\ y = 25 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 26 \\ y = -25 \end{cases} \text{ (impossible) ou } \begin{cases} x = 10 \\ y = 7 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 10 \\ y = -7 \end{cases} \text{ (impossible)}$$

Et par suite $(x, y) \in \{(26, 25); (10, 7)\}$

2.

$$(S) : \begin{cases} a^2 - b^2 = 7344 \\ a \wedge b = 12 \end{cases}$$

On a $a \wedge b = 12$ donc $a = 12x$ ($x \in \mathbb{N}$) et $b = 12y$ ($y \in \mathbb{N}$)

Donc $a^2 - b^2 = 7344$ équivaut à $(12x)^2 - (12y)^2 = 7344$

$$\text{équivaut à } 144x^2 - 144y^2 = 7344$$

$$\text{équivaut à } x^2 - y^2 = 51$$

et d'après le résultat de la première question on a : $(x, y) \in \{(26, 25); (10, 7)\}$

et par suite $(a,b) \in \{(312,300);(120,84)\}$

Corrigé de l'exercice 20 :

On a $a = 5^{n+2} - 5^n = 5^n (5^2 - 1) = 5^n \times 24 = 2^3 \times 3^1 \times 5^n$

Et on a $b = 7^{n+2} - 7^n = 7^n (7^2 - 1) = 7^n \times 48 = 2^4 \times 3^1 \times 7^n$

Donc $a \wedge b = 2^3 \times 3 = 24$ et $a \vee b = 2^4 \times 3 \times 5^n \times 7^n = 48 \times (35)^n$

Corrigé de l'exercice 21 :

1.

- ▶ On calcule $\sqrt{2017} : \sqrt{2017} \approx 44,91$
- ▶ On détermine tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{2017} :$
 $2-3-5-7-11-13-17-19-23-29-31-37-41-43$
- ▶ Le nombre 2017 n'est pas divisible par ces nombres
D'où le nombre 2017 est premier.

2. On a $27000001 = 27000000 + 1 = (300)^3 + 1^3 = (300+1)(300^2 - 300 + 1) = 301 \times 89701$

Donc le nombre 27000001 n'est pas premier.