Produit scalaire : exercices

Les réponses aux questions sont disponibles à la fin du document

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

Exercice 1 :

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que : $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1$.
Calculer :

1) $(2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

2) $(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v})^2$

3) $(-3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2$

4) $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 - (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2$

Exercice 2 :

Dans la figure ci-dessous : ABC est un triangle isocèle en A, $AIBJ$ est un parallélogramme et $BC = 4$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$

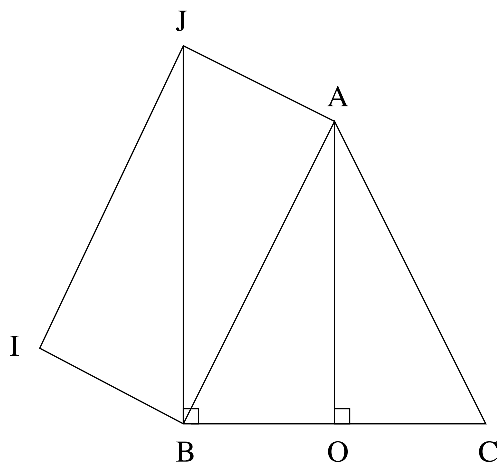
2) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JC}$

3) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AJ}$

4) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IA}$

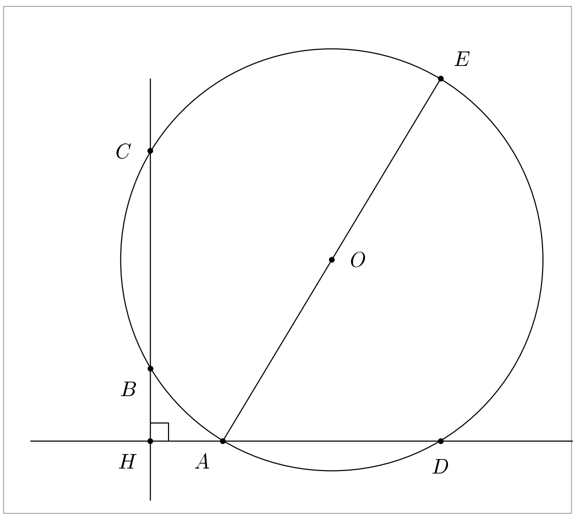
5) $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BI}$

6) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CI}$



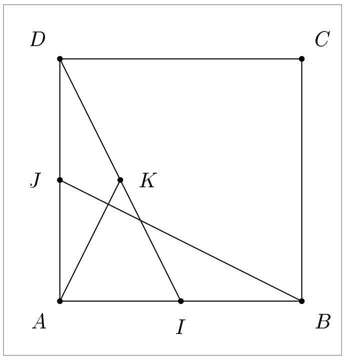
Exercice 3 :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A, B et C trois points distincts de $\mathcal{C}$.
On note H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), D l'intersection entre la hauteur (AH) et le cercle $\mathcal{C}$ et E le point du cercle diamètralement opposé à A.
Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AH}$.



Exercice 4 :

Soit $ABCD$ un carré, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AD]$ et K le milieu de $[ID]$.
Montrer que les droites (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.



Exercice 5 :

On considère les points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

a) Déterminer une équation de la tangente en B au cercle $\mathcal{C}$ de centre A passant par B.
b) Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.

Réponses exercice 1 :

On développe et on utilise que $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 4$, $\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = 9$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$.

1) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = -2$

2) $(\vec{u}+2\vec{v})^2 = 44$

3) $(-3\vec{u}+\vec{v})^2 = 39$

4) $(\vec{u}-\vec{v})^2-(\vec{u}+\vec{v})^2 = -4$

Réponses exercice 2 :

1) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BQ} = 4\times 2 = 8$

2) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = 4^2 = 16$

3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OB} = -4\times 2 = -8$

4) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JA}+4\times 2 = 4\times 2+8 = 16$

5) $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{OB} = -2^2 = -4$

6) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}\right) = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BI} = -4^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AJ} = -16-4\times 2 = -24$

Réponses exercice 3 :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AD} =$ car $\overrightarrow{AB}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{AH}$ sur (AD).
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AD} =$ car $\overrightarrow{AC}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{AH}$ sur (AD).
Donc, on a bien $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.
De plus, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AH} = \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right)\cdot\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}+0$ (le triangle ADE est rectangle en D).
Conclusion : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AH}$.

Réponses exercice 4 :

$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BJ} = \left(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JK}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}\right) = \left(\overrightarrow{AJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}\right)$
$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = 0 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 + 0 = 0$
Les droites (AK) et (BJ) sont bien perpendiculaires.

Réponses exercice 5 :

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la tangente qui admet donc une équation de la forme : $-3x + 2y + c = 0$.
La tangente doit passer par B. On en déduit que $-3 \times (-1) + 2 \times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -9$.
Une équation de la tangente est donc : $-3x + 2y - 9 = 0$.
b) Le rayon du cercle est égal à la distance AB. Or, $AB = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.
Une équation du cercle est donc $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = 13$, c'est à dire $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$.