

Tronc Commun

Série 2 : Etude de Fonctions

Exercice 1 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-10x}{1+x^2}$

1. Montrer que la fonction f est impaire
2. Montrer que 5 est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$
3. a) Soient a et b deux réels distincts, montrer que : $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{10(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)}$
b) En déduire la monotonie de la fonction f sur $[0,1]$ et $[1,+\infty[$
4. Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x}{x-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2. Etudier la monotonie de f sur les intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Comparer les deux nombres : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Exercice 3 :

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = \frac{x}{x-2}$

1. Déterminer D_g et vérifier que pour tout x de D_g : $g(x) = 1 + \frac{2}{x-2}$
2. Donner les tableaux de variations de f et g
3. Déterminer les points d'intersection de (C_f) et (C_g) avec les axes du repère
4. Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
5. Déterminer algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$
7. Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{|x|}{|x|-2}$
 - a) Déterminer D_h
 - b) Montrer que la fonction h est paire

- c) Vérifier que $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+ - \{2\}$
- d) Tracer la courbe (C_h) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 8. Soit k la fonction définie par : $k(x) = |f(x)|$
 - a) Tracer la courbe (C_k) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
 - b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $k(x) = m$

Exercice 4 :

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = \frac{3x-3}{x+1}$

1. Déterminer D_g et vérifier que pour tout x de D_g : $g(x) = 3 - \frac{6}{x+1}$
2. Donner les tableaux de variations de f et g
3. Déterminer les points d'intersection de (C_f) et (C_g) avec les axes du repère
4. Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
5. Déterminer algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$
7. Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{3|x|-3}{|x|+1}$
 - a) Déterminer D_h
 - b) Montrer que la fonction h est paire
 - c) Vérifier que $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$
 - d) Tracer la courbe (C_h) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
8. Soit k la fonction définie par : $k(x) = |f(x)|$
 - a) Tracer la courbe (C_k) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
 - b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $k(x) = m$

Corrigé de l'exercice 1 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\triangleright -x \in \mathbb{R}$$

$$\triangleright f(-x) = \frac{-10(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{10x}{1+x^2} = -\frac{-10x}{1+x^2} = -f(x)$$

$$\text{Donc pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}, \text{ on a : } \begin{cases} -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

D'où f est une fonction impaire

2. Soit $x \in \mathbb{R}$:

On a :

$$f(x) - 5 = \frac{-10x}{1+x^2} - 5 = \frac{-10x - 5 - 5x^2}{1+x^2} = \frac{-5(x^2 + 2x + 1)}{1+x^2} = \frac{-5(x+1)^2}{1+x^2}$$

$$\text{Puisque } \frac{-5(x+1)^2}{1+x^2} \leq 0 \text{ alors } f(x) \leq 5$$

De plus, il est clair que $f(-1) = 5$ (si non vous pouvez résoudre l'équation $f(x) = 5$) pour

Et par suite tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) \leq f(-1)$

On conclut que $f(-1) = 5$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

3. a) Soient a et b deux réels distincts, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &= \frac{\frac{-10a}{1+a^2} - \frac{-10b}{1+b^2}}{a - b} \\ &= \frac{-10a(1+b^2) + 10b(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(a-b)} \\ &= \frac{10(-a - ab^2 + b + ba^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(a-b)} \\ &= \frac{10(-(a-b) + ab(a-b))}{(1+a^2)(1+b^2)(a-b)} \\ &= \frac{10(a-b)(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(a-b)} \\ &= \frac{10(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)} \end{aligned}$$

Donc pour tout a et b deux réels distincts, on a : $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{10(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)}$

b)

▷ étudions la monotonie de la fonction f sur $[0,1]$:

on a : $10 > 0$ et $(1+a^2)(1+b^2) > 0$

et on a : $\begin{cases} 0 \leq a \leq 1 \\ 0 \leq b \leq 1 \end{cases}$

Donc $0 \leq ab \leq 1$

Donc $ab-1 \leq 0$

Et puisque $a \neq b$ alors $ab-1 < 0$

D'où $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} < 0$

Et par suite f est strictement décroissante sur $[0,1]$

▷ étudions la monotonie de la fonction f sur $[1,+\infty[$:

on a : $10 > 0$ et $(1+a^2)(1+b^2) > 0$

et on a : $\begin{cases} a \geq 1 \\ b \geq 1 \end{cases}$

Donc $ab \geq 1$

Donc $ab-1 \geq 0$

Et puisque $a \neq b$ alors $ab-1 > 0$

D'où $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} > 0$

Et par suite f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

4. On a f est une fonction impaire

▷ Puisque f est strictement décroissante sur $[0,1]$ alors f l'est aussi sur $[-1,0]$

▷ Puisque f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ alors f l'est aussi sur $]-\infty,1]$

D'où, le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$		5	-5	

Corrigé de l'exercice 2 :

1. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

2. Soient a et b deux éléments distincts de D_f , on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &= \frac{\frac{a}{a-1} - \frac{b}{b-1}}{a - b} \\ &= \frac{\frac{ab - a - ab + b}{(a-1)(b-1)}}{a - b} \\ &= \frac{-(a-b)}{(a-1)(b-1)(a-b)} \\ &= \frac{-1}{(a-1)(b-1)} \end{aligned}$$

Donc pour tout a et b deux éléments distincts de D_f : $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{-1}{(a-1)(b-1)}$

Sur $]-\infty, 1[$:

On a $a < 1$ et $b < 1$

Donc $a-1 < 0$ et $b-1 < 0$

Donc $\frac{-1}{(a-1)(b-1)} < 0$

Donc $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} < 0$

Et par suite f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$

Sur $]1, +\infty[$:

On a $a > 1$ et $b > 1$

Donc $a-1 > 0$ et $b-1 > 0$

Donc $\frac{-1}{(a-1)(b-1)} < 0$

Donc $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} < 0$

Et par suite f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$

3. Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

4. On a $\sqrt{2} \in]1, +\infty[$, $\sqrt{3} \in]1, +\infty[$ et $\sqrt{2} < \sqrt{3}$

Puisque f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ alors $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3})$

Et par suite $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$.

Corrigé de l'exercice 3 :

1.

$$\triangleright D_g = \{x \in \mathbb{R} / x-2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

$\triangleright$ Soit $x \in D_g$,on a:

$$1 + \frac{2}{x-2} = \frac{x-2+2}{x-2} = \frac{x}{x-2} = g(x)$$

Donc pour tout x de D_g : $g(x) = 1 + \frac{2}{x-2}$

2.

$$\triangleright f(x) = x^2 - 2x$$

On a : $a = 1$ donc $a > 0$

$$\text{Et on a : } \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1 \text{ et } f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(1) = -1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

-1

$$\triangleright g(x) = \frac{x}{x-2}$$

On a : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2$ donc $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} < 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

3.

▷ Déterminons les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses :

Réolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \text{ équivaut à } x^2 - 2x = 0$$

$$f(x) = 0 \text{ équivaut à } x = 0 \text{ ou } x = 2$$

$$\text{Et par suite : } (C_f) \cap (Ox) = \{A(1,0); B(2,0)\}$$

▷ Déterminons les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées :

Calculons $f(0)$:

$$\text{On a : } f(0) = 0$$

$$\text{Donc } (C_f) \cap (Oy) = \{O(0,0)\}$$

▷ Déterminons les points d'intersection de (C_g) avec l'axe des abscisses :

Réolvons dans $\mathbb{R} - \{2\}$ l'équation : $g(x) = 0$

$$g(x) = 0 \text{ équivaut à } \frac{x}{x-2} = 0$$

$$g(x) = 0 \text{ équivaut à } x = 0$$

$$\text{Et par suite : } (C_g) \cap (Ox) = \{O(0,0)\}$$

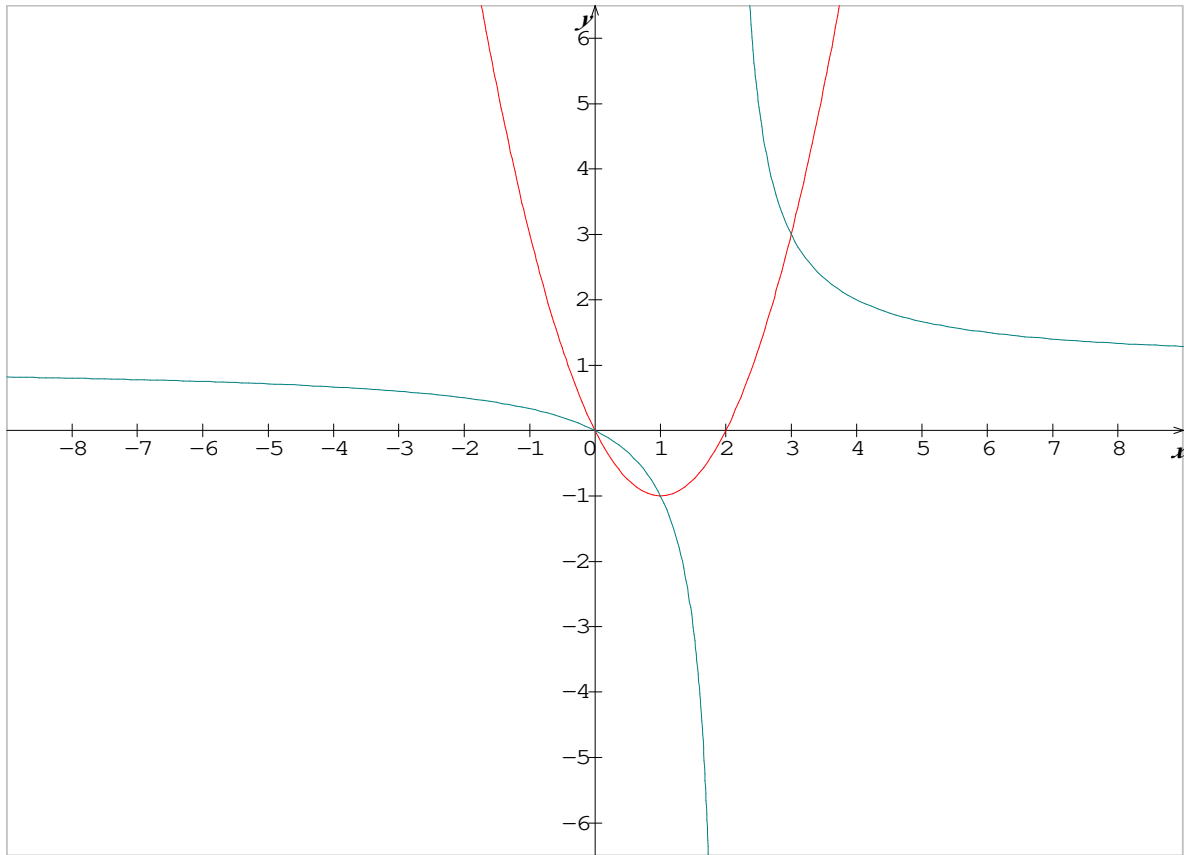
▷ Déterminons les points d'intersection de (C_g) avec l'axe des ordonnées :

Calculons $g(0)$:

$$\text{On a : } g(0) = 0$$

$$\text{Donc } (C_g) \cap (Oy) = \{O(0,0)\}$$

4.



5. Résolvons dans $\mathbb{R} - \{1\}$ l'équation : $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x) \text{ équivaut à } x^2 - 2x = \frac{x}{x-2}$$

$$\text{équivaut à } x(x-2) - \frac{x}{x-2} = 0$$

$$\text{équivaut à } x \left[(x-2) - \frac{1}{x-2} \right] = 0$$

$$\text{équivaut à } x \left[\frac{(x-1)(x-3)}{x-2} \right] = 0$$

$$\text{équivaut à } x=0 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=3$$

et par suite $(C_f) \cap (C_g) = \{A(1, -1); O(0, 0); D(3, 3)\}$

6. graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ équivaut à déterminer les intervalles dont on a (C_f) est au-dessous de (C_g)

c-à-d $S = [0, 1] \cup [2, 3]$

7. $h(x) = \frac{|x|}{|x|-2}$

a) $D_h = \{x \in \mathbb{R} / |x|-2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / |x| \neq 2\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$

b) Soit $x \in D_h$, on a :

▷ $-x \in D_h$ (car D_h est symétrique par rapport à 0)

▷ $h(-x) = \frac{|-x|}{|-x|-2} = \frac{|x|}{|x|-2} = h(x)$

Donc pour tout x de D_h , on a : $\begin{cases} -x \in D_h \\ h(-x) = h(x) \end{cases}$

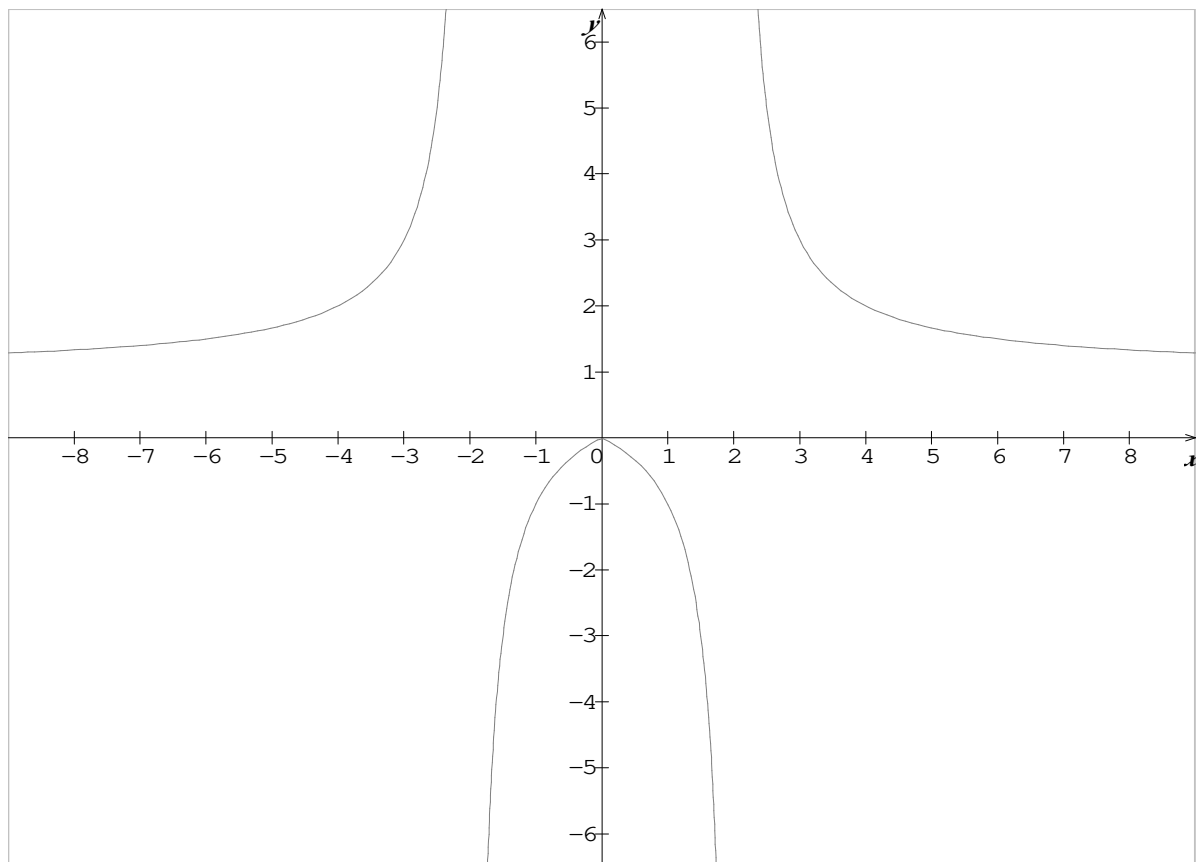
D'où la fonction h est paire

c) Soit $x \in \mathbb{R}^+ - \{2\}$, on a :

$$h(x) = \frac{|x|}{|x|-2} = \frac{x}{x-2} = g(x) \quad \text{car} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ |x| = x \end{cases}$$

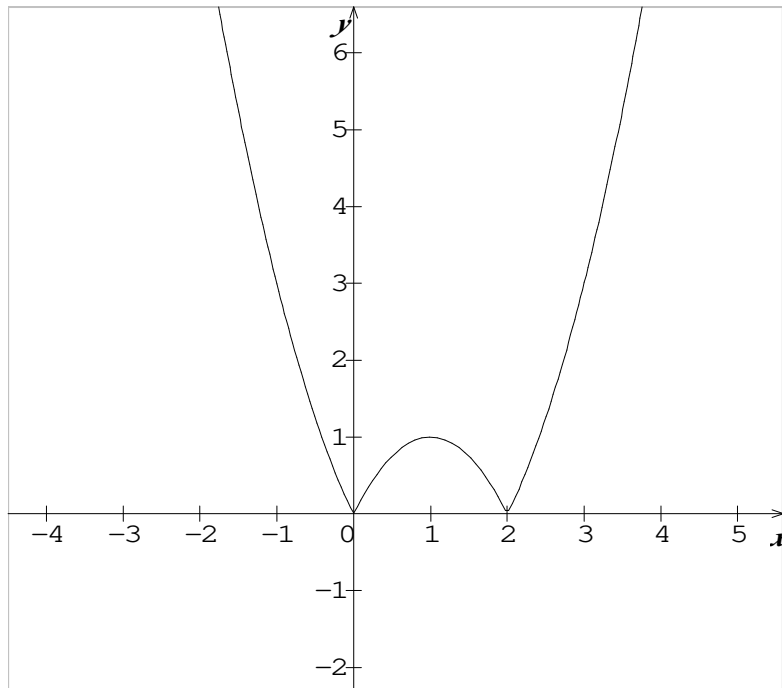
Donc $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+ - \{2\}$

d)



8. $k(x) = |f(x)|$

a)



b) le nombre de solutions de l'équation $k(x) = m$ est le nombre de points d'intersection de (C_k) et l'axe $(\Delta_m): y = m$

- ▷ Si $m < 0$: l'équation n'a pas de solutions
- ▷ Si $m = 0$: l'équation admet deux solutions
- ▷ Si $0 < m < 1$: l'équation admet 4 solutions
- ▷ Si $m = 1$: l'équation admet 3 solutions
- ▷ Si $m > 1$: l'équation admet deux solutions

Corrigé de l'exercice 4 :

1.

▷ $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

▷ Soit $x \in D_g$, on a:

$$3 - \frac{6}{x+1} = \frac{3(x+1)-6}{x+1} = \frac{3x+3-6}{x+1} = \frac{3x-3}{x+1} = g(x)$$

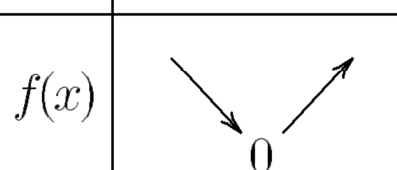
Donc pour tout x de D_g : $g(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$

2.

▷ $f(x) = x^2 - 2x + 1$

On a : $a = 1$ donc $a > 0$

Et on a : $\frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1$ et $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(1) = 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

▷ $g(x) = \frac{3x-3}{x+1}$

On a : $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$ donc $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$			

3.

▷ Déterminons les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses :

Réolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$

$f(x) = 0$ équivaut à $x^2 - 2x + 1 = 0$

$f(x) = 0$ équivaut à $x = 1$

Et par suite : $(C_f) \cap (Ox) = \{A(1,0)\}$

▷ Déterminons les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées :

Calculons $f(0)$:

On a : $f(0) = 1$

$$\text{Donc } (C_f) \cap (Oy) = \{B(0,1)\}$$

▷ Déterminons les points d'intersection de (C_g) avec l'axe des abscisses :

Résolvons dans $\mathbb{R} - \{-1\}$ l'équation : $g(x) = 0$

$$g(x) = 0 \text{ équivaut à } \frac{3x-3}{x+1} = 0$$

$$g(x) = 0 \text{ équivaut à } x = 1$$

$$\text{Et par suite : } (C_g) \cap (Ox) = \{A(1,0)\}$$

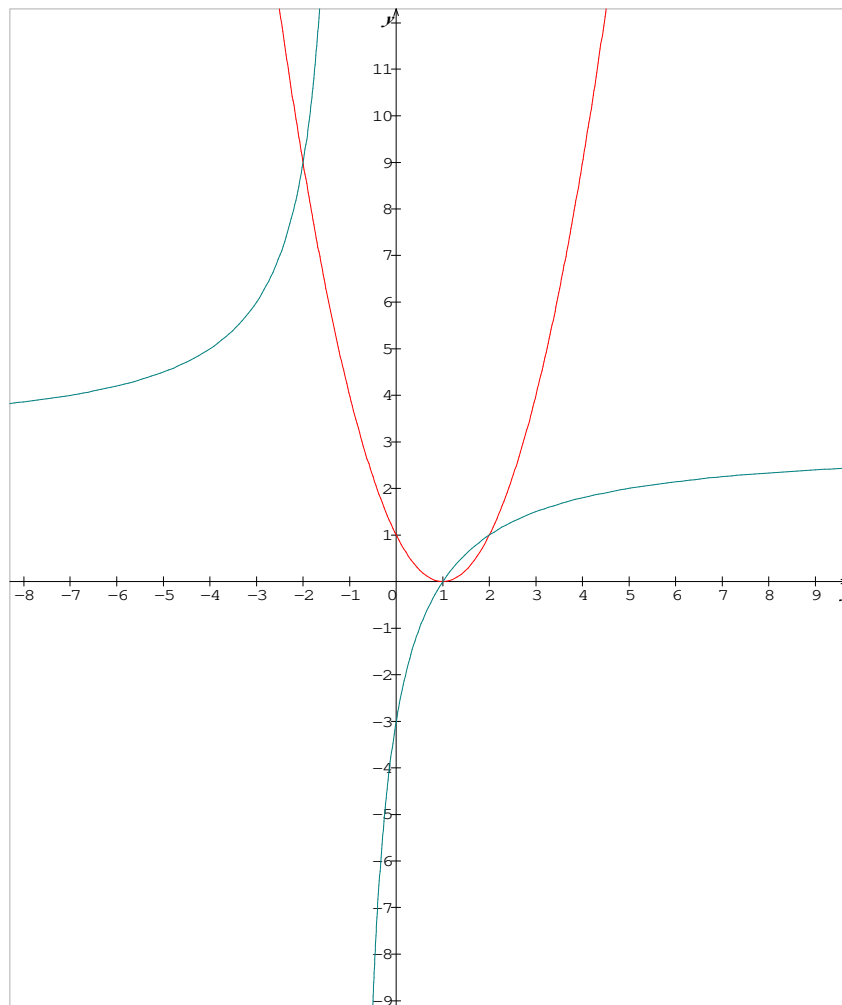
▷ Déterminons les points d'intersection de (C_g) avec l'axe des ordonnées :

Calculons $g(0)$:

$$\text{On a : } g(0) = -3$$

$$\text{Donc } (C_g) \cap (Oy) = \{C(0,-3)\}$$

4.



5. Résolvons dans $\mathbb{R} - \{-1\}$ l'équation : $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x) \text{ équivaut à } x^2 - 2x + 1 = \frac{3x-3}{x+1}$$

$$\text{équivaut à } (x-1)^2 - \frac{3(x-1)}{x+1} = 0$$

$$\text{équivaut à } (x-1) \left[(x-1) - \frac{3}{x+1} \right] = 0$$

$$\text{équivaut à } (x-1) \left[\frac{x^2-4}{x+1} \right] = 0$$

$$\text{équivaut à } x = -2 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 2$$

et par suite $(C_f) \cap (C_g) = \{A(1,0); E(-2,9); F(2,1)\}$

6. graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ équivaut à déterminer les intervalles dont on a (C_f) est au-dessus de (C_g)

$$\text{c-à-d } S =]-\infty, -2] \cup]-1, 1] \cup [2, +\infty[$$

7. $h(x) = \frac{3|x|-3}{|x|+1}$

a) $D_h = \{x \in \mathbb{R} / |x|+1 \neq 0\} = \mathbb{R}$ (car pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $|x|+1 \neq 0$ ($|x| \geq 0$))

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\triangleright -x \in \mathbb{R}$$

$$\triangleright h(-x) = \frac{3|-x|-3}{|-x|+1} = \frac{3|x|-3}{|x|+1} = h(x)$$

$$\text{Donc pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}, \text{ on a : } \begin{cases} -x \in \mathbb{R} \\ h(-x) = h(x) \end{cases}$$

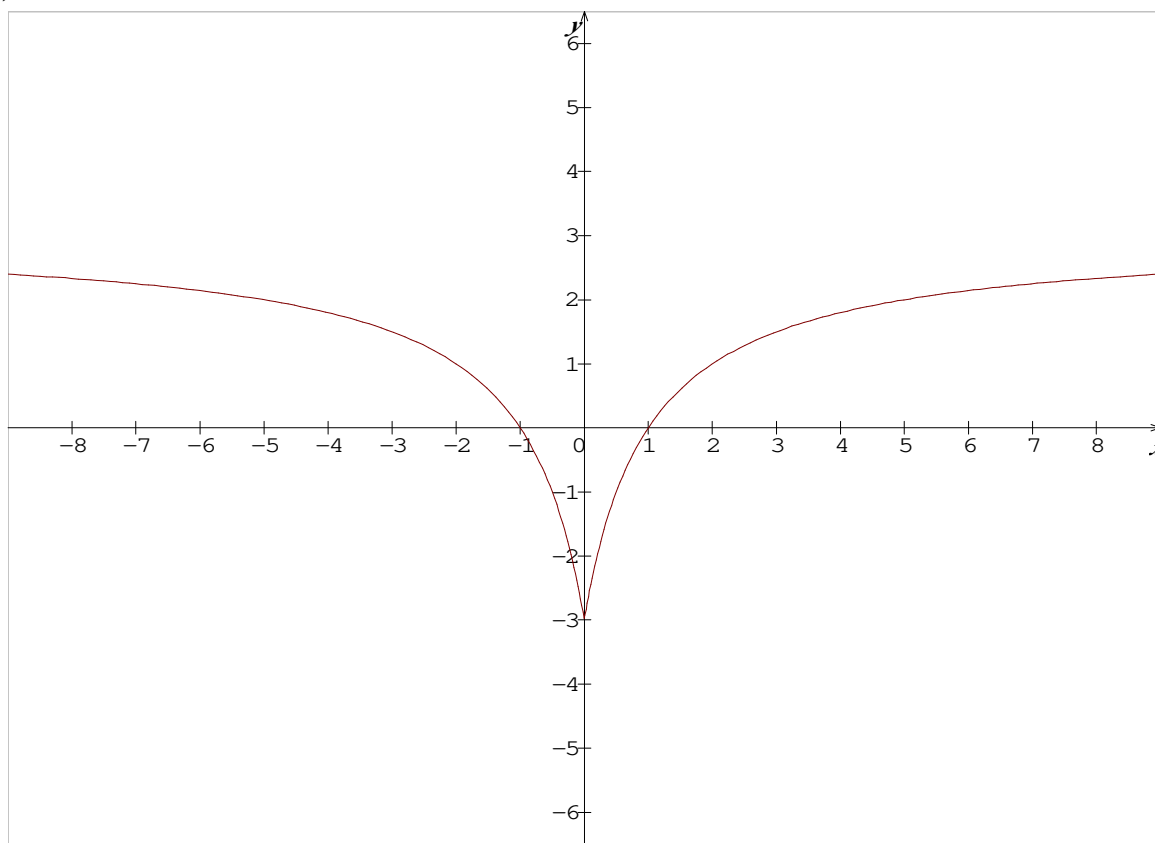
D'où la fonction h est paire

c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$h(x) = \frac{3|x|-3}{|x|+1} = \frac{3x-3}{x+1} = g(x) \text{ car } \begin{cases} x \geq 0 \\ |x| = x \end{cases}$$

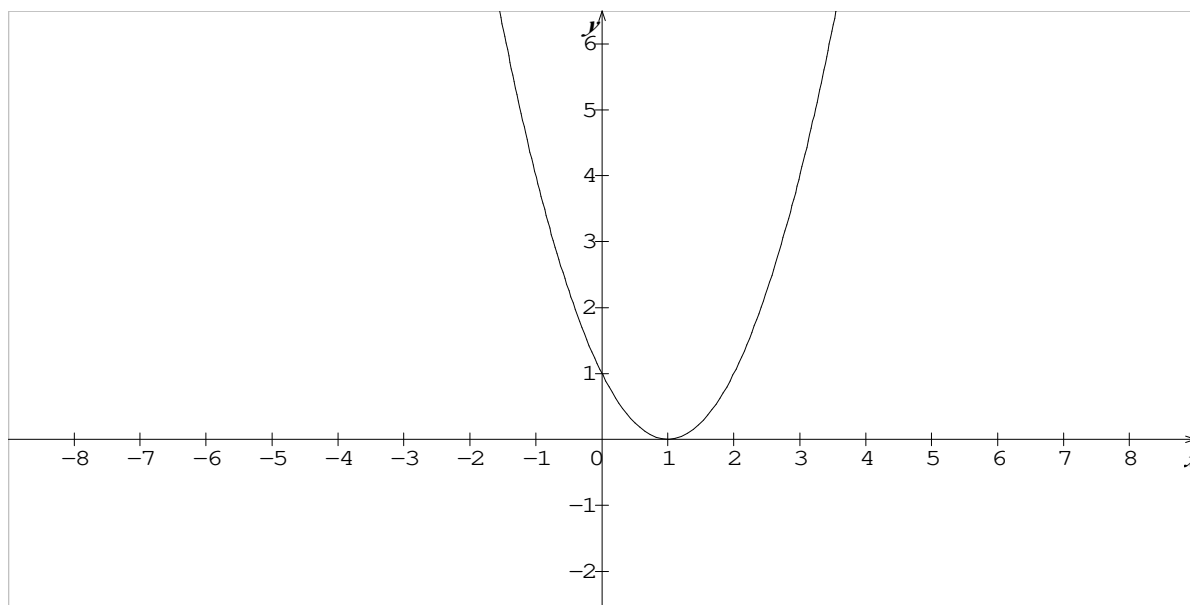
Donc $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

d)



8. $k(x) = |f(x)|$

a) On a $k(x) = |f(x)| = f(x)$ car $(f(x) \geq 0)$ donc (C_k) et (C_f) sont confondues



b) le nombre de solutions de l'équation $k(x) = m$ est le nombre de points d'intersection de (C_k) et l'axe $(\Delta_m): y = m$

- ▷ Si $m < 0$: l'équation n'a pas de solutions
- ▷ Si $m = 0$: l'équation admet une seule solution
- ▷ Si $m > 0$: l'équation admet deux solutions

つづく