

Tronc Commun

Série 2 : Calcul Trigonométrique

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ les équations :

a. $\cos x = \frac{1}{2}$

b. $\cos x = -1$

2. Montrer que pour tout élément x de $[0, 2\pi]$ on a :

$$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = (2\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)$$

3. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation :

$$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$$

4. Etudier le signe de : $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1$

5. En déduire dans $[0, 2\pi]$ l'ensemble de solutions de l'inéquation :

$$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 \geq 0$$

Exercice 2 :

On pose $f(x) = 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1$, pour tout x de \mathbb{R}

1. Calculer $f\left(\frac{2019\pi}{6}\right)$

2. Montrer que $f(\pi - x) = f(x)$

3. Résoudre dans $I = [0, 2\pi[$:

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) > 0$

Exercice 3 :

Soit x un nombre réel vérifiant l'égalité : (1) : $\sin(x) \times \cos(x) = \frac{1}{2}$

1. Démontrer que $\sin x = \cos x$

2. Déterminer toutes les valeurs de x vérifiant (1)

Exercice 4 :

Etablir les égalités suivantes :

1. $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 2\cos^2(x) - 1$
2. $\cos^6(x) + \sin^6(x) + 3\sin^2(x)\cos^2(x) = 1$

Exercice 5 :

Exprimer en fonction de $\tan(x)$

1. $A(x) = \frac{\sin^3(x) - \cos^3(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$
2. $B(x) = \cos^2(x) - 5\sin(x)\cos(x)$

Corrigé de l'exercice 1 :

1.

a) Résolvons dans $[0, 2\pi]$: $\cos x = \frac{1}{2}$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ équivaut à } \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{Equivaut à } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

▷ On a :

$$0 \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \frac{1}{3} + 2k \leq 2$$

$$-\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{5}{6}$$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = 0$

$$\text{Donc } x = \frac{\pi}{3}$$

▷ On a :

$$0 \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \frac{-1}{3} + 2k \leq 2$$

$$\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{7}{6}$$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = 1$

$$\text{Donc } x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{Et par suite : } S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

b) Résolvons dans $[0, 2\pi]$: $\cos x = -1$

$\cos x = -1$ équivaut à $x = \pi + 2k\pi$

▷ On a :

$$0 \leq \pi + 2k\pi \leq 2\pi$$

$$0 \leq 1 + 2k \leq 2$$

$$-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = 0$

$$\text{Donc } x = \pi$$

$$\text{Et par suite : } S = \{\pi\}$$

2. Soit x un élément de $[0, 2\pi]$, on a :

$$(2\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1) = 2\cos^2(x) + 2\cos(x) - \cos(x) - 1$$

$$\text{Donc : } 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = (2\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)$$

3. Résolvons dans $[0, 2\pi]$, l'équation : $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$

$$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0 \text{ Équivaut à } (2\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1) = 0$$

$$\text{Équivaut à } 2\cos(x) - 1 = 0 \text{ ou } \cos(x) + 1 = 0$$

Équivaut à $\cos(x) = \frac{1}{2}$ ou $\cos(x) = -1$

Et par suite : $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \right\}$

4. Étudions le signe de : $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1$	+	0	-	0	+

5. Résolvons dans $[0, 2\pi]$, l'inéquation $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 \geq 0$

$$S = \left[0, \frac{\pi}{3} \right] \cup \{ \pi \} \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi \right]$$

Corrigé de l'exercice 2 :

On pose $f(x) = 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1$, pour tout x de \mathbb{R}

1. On a : $\frac{2019\pi}{6} = \frac{3\pi + 2016\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 336\pi = \frac{\pi}{2} + 2(168)\pi$

Donc $\sin\left(\frac{2019\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2(168)\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Et par suite :

$$f\left(\frac{2019\pi}{6}\right) = 2\sin^2\left(\frac{2019\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{2019\pi}{6}\right) - 1 = 2(1)^2 - (1) - 1 = 0$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$:

On sait que $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

Donc :

$$f(\pi - x) = 2\sin^2(\pi - x) - \sin(\pi - x) - 1 = 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = f(x)$$

Et par suite : $f(\pi - x) = f(x)$, pour tout x de \mathbb{R}

3.

a) Résolvons dans $I = [0, 2\pi[$: $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \text{ équivaut à } 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$$

Equivaut à $(2\sin(x)+1)(\sin(x)-1)=0$

Equivaut à $2\sin(x)+1=0$ ou $\sin(x)-1=0$

Equivaut à $\sin(x)=-\frac{1}{2}$ ou $\sin(x)=1$

▷ $\sin(x)=-\frac{1}{2}$ équivaut à $\sin(x)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

Equivaut à $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(\frac{-\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

○

$$0 \leq \frac{-\pi}{6} + 2k\pi < 2\pi$$

$$0 \leq -\frac{1}{6} + 2k < 2$$

$$\frac{1}{12} \leq k < \frac{13}{12}$$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$, alors $k=1$

$$\text{Donc } x = \frac{11\pi}{6}$$

○

$$0 \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < 2\pi$$

$$0 \leq \frac{7}{6} + 2k < 2$$

$$\frac{-7}{12} \leq k < \frac{5}{12}$$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$, alors $k=0$

$$\text{Donc } x = \frac{7\pi}{6}$$

▷ $\sin(x)=1$ équivaut à $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

○

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2\pi$$

$$0 \leq \frac{1}{6} + 2k < 2$$

$$\frac{-1}{12} \leq k < \frac{11}{12}$$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = 0$

$$\text{Donc } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Conclusion : } S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

b) Résolvons dans $I = [0, 2\pi[$: $f(x) > 0$

$$f(x) > 0 \text{ équivaut à } 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 > 0$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$	2π
$2\sin^2(x) - \sin(x) - 1$	-	0	-	0	+	0	-

$$S = \left] \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right[$$

Corrigé de l'exercice 3 :

1. Soit x un nombre réel vérifiant l'égalité : (1) : $\sin(x) \times \cos(x) = \frac{1}{2}$

$$(1) : \sin(x) \times \cos(x) = \frac{1}{2} \text{ équivaut à } 2\sin(x) \times \cos(x) = 1$$

$$\text{équivaut à } 2\sin(x) \times \cos(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

$$\text{équivaut à } \cos^2(x) + \sin^2(x) - 2\sin(x) \times \cos(x) = 0$$

$$\text{équivaut à } (\cos(x) - \sin(x))^2 = 0$$

$$\text{équivaut à } \cos(x) - \sin(x) = 0$$

$$\text{équivaut à } \sin x = \cos x$$

2. Déterminons toutes les valeurs de x vérifiant (1)

On a (1) équivaut à $\sin x = \cos x$

Equivaut à $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Equivaut à $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Equivaut à $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \text{ou} \\ 0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (\text{impossible}) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

On conclut que : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Corrigé de l'exercice 4 :

1.

$$\begin{aligned} \cos^4(x) - \sin^4(x) &= (\cos^2(x) - \sin^2(x))(\cos^2(x) + \sin^2(x)) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) \\ &= 2\cos^2(x) - 1 \end{aligned}$$

2. On sait que : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Donc : $(\cos^2(x) + \sin^2(x))^3 = (1)^3$

Donc $(\cos^2(x))^3 + (\sin^2(x))^3 + 3(\cos^2(x))^2 \sin^2(x) + 3\cos^2(x)(\sin^2(x))^2 = 1$

Donc $\cos^6(x) + \sin^6(x) + 3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) = 1$

Donc $\cos^6(x) + \sin^6(x) + 3\cos^2(x)\sin^2(x)(\cos^2(x) + \sin^2(x)) = 1$

Et par suite $\cos^6(x) + \sin^6(x) + 3\sin^2(x)\cos^2(x) = 1$

Corrigé de l'exercice 5 :

1.

$$A(x) = \frac{\sin^3(x) - \cos^3(x)}{\sin(x) + \cos(x)} = \frac{\cos^3(x) \left(\frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)} - 1 \right)}{\cos(x) \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1 \right)} = \cos^2(x) \frac{\tan^3(x) - 1}{\tan(x) + 1} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \times \frac{\tan^3(x) - 1}{\tan(x) + 1}$$

2.

$$B(x) = \cos^2(x) - 5\sin(x)\cos(x) = \cos^2(x) \left(1 - 5 \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} (1 - 5 \tan x)$$

つづく