Exercice 1 :

Mettre sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers les deux réels suivants

$A = 3\sqrt{112} - 2\sqrt{7} + 5\sqrt{28}$ $\qquad$ $B = 2\sqrt{32} - 3\sqrt{18} - 3\sqrt{50}$

Exercice2:

Ecrire le plus simplement possible (rendre le dénominateur entier)les fractions suivantes

$$A = \frac{3\sqrt{360} - 2\sqrt{180}}{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \qquad B = \frac{2}{\sqrt{33}} \times \frac{\sqrt{363}}{\sqrt{2} - 1}$$

Exercice3:

On pose $A = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{10 - 3\sqrt{11}} + \dfrac{1}{10 + 3\sqrt{11}}}}$ A est il un rationnel ?

Exercice4:

Vrai ou faux ? justifier votre réponse.

1. Un nombre rationnel est un réel.
2. Un nombre rationnel peut être un entier relatif.
3. Un nombre rationnel ne peut pas être un décimal.
4. Un nombre décimal est un rationnel.
5. L'inverse d'un rationnel peut être un entier naturel.
6. L'opposé d'un décimal peut être un entier relatif.

Exercice5:

Factorisez les expressions suivantes :

$A = 4x^2 - 9 + 2(3 - 2x)$ $\qquad$ $B = x^3 - 8 + 4(x^2 - 4) - 3(x - 2)$

$C = 8x^3 + 1 - 2(1 - 4x^2)$ $\qquad$ $D = x^5 + x^3 - x^2 - 1$

Exercice6:

Soit x et y deux réels tel que $x + y = \sqrt{5}$ et $xy = \dfrac{4}{5}$

Calculez $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$ et $x^4 + y^4$

Exercice 1 : (correction)

$$
\begin{aligned}
A &= 3\sqrt{112}-2\sqrt{7}+5\sqrt{28}\\
&= 3\sqrt{4^2\times 7}-2\sqrt{7}+\sqrt{2^2\times 7}\\
&= 12\sqrt{7}-2\sqrt{7}+10\sqrt{7}\\
&= (12-2+10)\sqrt{7}\\
&= 20\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= 2\sqrt{32}-3\sqrt{18}-3\sqrt{50}\\
&= 2\sqrt{4^2\times 2}-3\sqrt{3^2\times 2}-3\sqrt{5^2\times 2}\\
&= 8\sqrt{2}-9\sqrt{2}-15\sqrt{2}\\
&= (8-9-15)\sqrt{2}\\
&= -16\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Exercice2: (correction)

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{3\sqrt{360}-2\sqrt{180}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}\\
&= \frac{3\sqrt{6^2\times 10}-2\sqrt{6^2\times 5}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}\\
&= \frac{18\sqrt{10}-12\sqrt{5}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}\\
&= \frac{(18\sqrt{10}-12\sqrt{5})(\sqrt{10}+\sqrt{2})}{10-2}\\
&= \frac{180+36\sqrt{5}-60\sqrt{2}-12\sqrt{10}}{8}\\
&= \frac{1}{2}(45+9\sqrt{5}-15\sqrt{2}-3\sqrt{10})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{2}{\sqrt{33}}\times\frac{\sqrt{363}}{\sqrt{2}-1}\\
&= \frac{2}{\sqrt{33}}\times\frac{\sqrt{33\times 11}}{\sqrt{2}-1}\\
&= \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{2}-1}\\
&= \frac{2\sqrt{11}(\sqrt{2}+1)}{2-1}\\
&= 2\sqrt{11}(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}
$$

Exercice3: (correction)

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{10-3\sqrt{11}}+\frac{1}{10+3\sqrt{11}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10+3\sqrt{11}}{100-99}+\frac{10-3\sqrt{11}}{100-99}}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{10+3\sqrt{11}+10-3\sqrt{11}}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{20}
\end{aligned}
$$

Donc A est un irrationnel car $\sqrt{20}$ n'est pas un carré parfait.

Exercice4: (correction)

1. Vrai, puisque $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
2. Vrai, il peut l'être. $\frac{-6}{2}$ est un rationnel ($-3 = \frac{-6}{2}$) et il est entier.
3. Faux, il peut l'être. $\frac{5}{2}$ est un rationnel ($2,5 = \frac{5}{2}$) et il est un décimal.
4. Vrai, puisque $ID \subset \mathbb{Q}$.
5. Vrai, $\frac{1}{2}$ est un rationnel ($\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$)et 2 est un entier naturel.
6. Vrai, $2,0$ est un décimal ($-2,0 = -2$) et -2 est un entier relatif.

Exercice5: (correction)

$$
\begin{aligned}
A &= 4x^2 - 9 + 2(3 - 2x) \\
&= (2x)^2 - 3^2 + 2(3 - 2x) \\
&= (2x - 3)(2x + 3) - 2(2x - 3) \\
&= (2x - 3)(2x + 3 - 2) \\
&= (2x - 3)(2x + 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= x^3 - 8 + 4(x^2 - 4) - 3(x - 2) \\
&= x^3 - 2^3 + 4(x^2 - 2^2) - 3(x - 2) \\
&= (x - 2)(x^2 + 2x + 2^2) + 4(x - 2)(x + 2) - 3(x - 2) \\
&= (x - 2)(x^2 + 2x + 4 + 4(x + 2) - 3) \\
&= (x - 2)(x^2 + 6x + 9) \\
&= (x - 2)(x + 3)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= 8x^3 + 1 - 2(1 - 4x^2) \\
&= (2x)^3 + 1^3 - 2(1^2 - (2x)^2) \\
&= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 2(1 - 2x)(1 + 2x) \\
&= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1 - 2(1 - 2x)) \\
&= (2x + 1)(4x^2 + 2x - 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= x^5 + x^3 - x^2 - 1 \\
&= x^3(x^2 + 1) - (x^2 + 1) \\
&= (x^2 + 1)(x^3 - 1) \\
&= (x^2 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)
\end{aligned}
$$

Exercice6: (correction)

On sait que $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ donc

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\
&= (\sqrt{5})^2 - 2\times\frac{4}{5} \\
&= 5 - \frac{8}{5} \\
&= \frac{17}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^3+y^3 &= (x+y)(x^2+xy+y^2) \\
&= (\sqrt{5})(\frac{17}{5}+\frac{4}{5}) \\
&= \frac{21\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^4+y^4 &= (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 \\
&= (x^2+y^2)^2 - 2(xy)^2 \\
&= (\frac{17}{5})^2 - 2(\frac{4}{5})^2 \\
&= \frac{289-32}{25} \\
&= \frac{257}{25}
\end{aligned}$$