

~ Tronc Commun ~  
L'ordre dans R  
(6 exercices résolus)

**Exercice 1 :**

soit  $n$  un entier naturel non nul, comparer  $a$  et  $b$  dans les cas suivants :

1)  $a = \frac{1}{n}$  ;  $b = \frac{2}{n+1}$

2)  $a = \frac{n}{n+1}$  ;  $b = \frac{n+1}{n+2}$

3)  $a = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$  ;  $b = \sqrt{n+1}$

**Exercice 2 :**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs.

1) Montrer que  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

2) Développer  $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

3) En déduire que  $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

**Exercice 3 :**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \geq 1$  et  $b \geq 1$ .

Montrer que  $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \leq \sqrt{ab}$

**Exercice 4 :**

Soient  $x$  et  $y$  deux réels positifs tels que  $x + y = 1$

1) Montrer que  $xy \leq \frac{1}{4}$

2) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)\left(1 + \frac{1}{y^n}\right) \geq (1 + 2^n)^2$

**Exercice 5 :**

$x$  et  $y$  deux réels tels que :  $0 < x < y$

1) Montrer que  $x^2 < xy < y^2$

2) Montrer que si  $xy = 15$  alors  $x < \sqrt{15} < y$

3) Montrer que  $\frac{931}{241} < \sqrt{15} < \frac{3615}{931}$

**Exercice 6 :**

Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que :  $1 \leq x \leq 2$  et  $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

On pose  $E = x^2 - y^2 + x + y$

- 1) Donner un encadrement de  $E$
- 2) Vérifier que :  $E = (x + y)(x - y + 1)$  et en déduire un encadrement de  $E$ .
- 3) En déduire que :  $\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}$

### Corrigé de l'exercice 1

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

$$1) a-b = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{n+1-2n}{n(n+1)} = \frac{1-n}{n(n+1)}$$

On a  $n \in \mathbb{N}^*$  donc  $n > 0$  et  $n \geq 1$

Donc  $n(n+1) > 0$  et  $1-n \leq 0$

$$\text{Donc } \frac{1-n}{n(n+1)} \leq 0$$

Donc  $a-b \leq 0$

Et par suite  $a \leq b$

$$2) a-b = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$

On a  $n \in \mathbb{N}^*$  donc  $n > 0$

Donc  $(n+1)(n+2) > 0$

$$\text{Donc } \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

Donc  $a-b < 0$

Et par suite  $a < b$

$$3) a-b = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} = \frac{n-n-1}{\sqrt{n+1}} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}}$$

On a  $\sqrt{n+1} > 0$

$$\text{Donc } \frac{-1}{\sqrt{n+1}} < 0$$

### Corrigé de l'exercice 2

1) Soient a et b deux réels strictement positifs

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 &= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} \\ &= \frac{(a-b)^2}{ab} \end{aligned}$$

On a  $(a-b)^2 \geq 0$  et  $ab > 0$

$$\text{Donc } \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$$

$$\text{Donc } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 \geq 0$$

Et par suite  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$  pour tous a et b deux réels strictement positifs.

$$2) (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$$

3) Soient a et b deux réels strictement positifs

D'après le résultat de la question 1), on a :  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

$$\text{Donc } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \geq 4$$

Et par suite  $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$  pour tous a et b deux réels strictement positifs.

### Corrigé de l'exercice 3

Soient a et b deux réels tels que  $a \geq 1$  et  $b \geq 1$ .

$$\begin{aligned} (\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1})^2 - (\sqrt{ab})^2 &= a-1 + 2\sqrt{(a-1)(b-1)} + b-1 - ab \\ &= a-ab + b-1 + 2\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1 \\ &= a(1-b) - (1-b) + 2\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1 \\ &= -(a-1)(b-1) + 2\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1 \\ &= -\left[(a-1)(b-1) - 2\sqrt{(a-1)(b-1)} + 1\right] \\ &= -\left[\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1\right]^2 \end{aligned}$$

Puisque  $-\left[\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1\right]^2 \leq 0$  alors  $(\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1})^2 - (\sqrt{ab})^2 \leq 0$

$$\text{Donc } (\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1})^2 \leq (\sqrt{ab})^2$$

Et par suite  $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \leq \sqrt{ab}$  pour tous a et b deux réels strictement positifs.

(Rq :  $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \geq 0$  et  $\sqrt{ab} \geq 0$ )

Corrigé de l'exercice 4

1) Soient  $x$  et  $y$  deux réels positifs tels que  $x + y = 1$

$$\text{On a } 0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$$\text{Donc } 0 \leq x + y - 2\sqrt{xy}$$

$$\text{Donc } 2\sqrt{xy} \leq x + y$$

$$\text{Et puisque } x + y = 1 \text{ alors } 2\sqrt{xy} \leq 1$$

$$\text{Donc } 4xy \leq 1$$

$$\text{D'où } xy \leq \frac{1}{4}$$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\text{On a : } \left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \left(1 + \frac{1}{y^n}\right) = 1 + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} + \frac{1}{(xy)^n} = 1 + \frac{x^n + y^n}{(xy)^n} + \frac{1}{(xy)^n}$$

$$\checkmark \text{ D'après le résultat de la question 1) on a : } xy \leq \frac{1}{4} \text{ donc } \boxed{\frac{1}{(xy)^n} \geq 2^{2n}} \quad (*)$$

$$\checkmark \text{ On sait que } (\sqrt{x^n} - \sqrt{y^n})^2 \geq 0 \text{ donc } x^n + y^n \geq 2\sqrt{(xy)^n}$$

$$\text{Donc } \frac{x^n + y^n}{(xy)^n} \geq \frac{2}{\sqrt{(xy)^n}}$$

$$\text{Et en utilisant } (*) : \text{ Il est clair que : } \frac{2}{\sqrt{(xy)^n}} \geq 2 \times 2^n$$

$$\text{D'où } \boxed{\frac{x^n + y^n}{(xy)^n} \geq 2 \times 2^n} \quad (**)$$

$$\checkmark \text{ D'après } (*) \text{ et } (**): 1 + \frac{x^n + y^n}{(xy)^n} + \frac{1}{(xy)^n} \geq 1 + 2 \times 2^n + 2^{2n}$$

$$\text{D'où } \boxed{\boxed{\left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \left(1 + \frac{1}{y^n}\right) \geq (1 + 2^n)^2}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} .$$

### Corrigé de l'exercice 5

1) Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que :  $0 < x < y$

On a  $x < y$  et  $x > 0$

donc  $x \times x < x \times y$

donc  $x^2 < xy$

et on a  $x < y$  et  $y > 0$

donc  $x \times y < y \times y$

donc  $xy < y^2$

et par suite  $x^2 < xy < y^2$

2) Supposons que  $xy = 15$

D'après le résultat de la question 1), on a  $x^2 < xy < y^2$

Donc  $x^2 < 15 < y^2$

Donc  $\sqrt{x^2} < \sqrt{15} < \sqrt{y^2}$

Donc  $|x| < \sqrt{15} < |y|$

Et puisque  $x > 0$  et  $y > 0$  alors  $x < \sqrt{15} < y$

3) Posons  $x = \frac{931}{241}$  et  $y = \frac{3615}{931}$

On a  $0 < x < y$  et  $xy = \frac{931}{241} \times \frac{3615}{931} = 15$

Donc D'après le résultat de la question 2), on a :  $\frac{931}{241} < \sqrt{15} < \frac{3615}{931}$ .

### Corrigé de l'exercice 6

Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que :  $1 \leq x \leq 2$  et  $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

1) On a  $1 \leq x \leq 2$

donc  $1 \leq x^2 \leq 4$

Et on a  $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

$$\text{donc } \frac{1}{4} \leq y^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{-9}{4} \leq -y^2 \leq \frac{-1}{4}}$$

$$\text{donc } 1 - \frac{9}{4} + 1 + \frac{1}{2} \leq x^2 - y^2 + x + y \leq 4 - \frac{1}{4} + 2 + \frac{3}{2}$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{1}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}}$$

2)

$$\checkmark (x+y)(x-y+1) = x^2 - xy + x + xy - y^2 + y = x^2 - y^2 + x + y = E$$

$$\checkmark \text{ On a } 1 \leq x \leq 2 \text{ et } \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc } \boxed{\frac{3}{2} \leq x+y \leq \frac{7}{2}} \text{ et } \boxed{\frac{1}{2} \leq x-y+1 \leq \frac{5}{2}}$$

$$\text{Donc } \frac{3}{4} \leq (x+y)(x-y+1) \leq \frac{35}{4}$$

$$\text{Et par suite } \boxed{\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{35}{4}}$$

3) On a :

d'après le résultat de la question 1) :  $E \in \left[ \frac{1}{4}, \frac{29}{4} \right]$  et d'après le résultat de la question

$$2) : E \in \left[ \frac{3}{4}, \frac{35}{4} \right]$$

$$\text{donc } E \in \left[ \frac{1}{4}, \frac{29}{4} \right] \cap \left[ \frac{3}{4}, \frac{35}{4} \right]$$

$$\text{d'où } E \in \left[ \frac{3}{4}, \frac{29}{4} \right].$$

つづく