

~ Tronc Commun ~
L'ordre dans IR
(Série #2 : 7 exercices résolus)

Exercice 1 :

Soit x un nombre réel de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

On pose $A(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

- 1) Donner un encadrement du nombre $A(x)$
- 2) a) Déterminer les deux réels a et b tels que : $A(x) = a + \frac{b}{x+2}$
b) Déterminer un autre encadrement du nombre $A(x)$
- 3) Déterminer le plus fin des deux encadrements précédents de $A(x)$

Exercice 2 :

- 1) Comparer $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{3}$
- 2) Développer $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2$
- 3) On pose $A = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$
Simplifier A
- 4) Sachant que : $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ et $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$
Donner une approximation de A d'amplitude 0,5 par défaut et par excès

Exercice 3 :

Soient a et b deux réels tels que : $|a+2| \leq 1$ et $0 \leq b \leq 2$

- 1) Encadrer le nombre a et montrer que $|a+b+1| \leq 2$
- 2) On considère le nombre réel A tel que : $A = ab - 2a + 3b$.
Vérifier que : $A = (a+3)(b-2) + 6$ et montrer que $2 \leq A \leq 6$

Exercice 4 :

Soit $x \in [4;6]$. On pose $A = \frac{2x+3}{x-2}$.

- 1) Donner un encadrement de A
- 2) a. Vérifier que $A = 2 + \frac{7}{x-2}$ b. Donner un autre encadrement de A

Exercice 5 :

Soient a et b deux réels tels que : $a \geq 2$, $b \leq 5$ et $b - a = 2$

- 1) Montrer que $a \leq 3$ et $4 \leq b$.
- 2) Calculer le nombre $A = \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(b-4)^2}$
- 3) Calculer le nombre $B = |a+b-6| + |a+b-8|$

Exercice 6 :

Soit x un nombre réel.

- 1) Vérifier que : $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$
- 2) Soit x de l'intervalle $[1;3]$
Montrer que : $-1 \leq x^2 - 2x \leq 3$
- 3) a. Sachant qu'on a : $x \in [1;3]$

Montrer que : $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{x^2 - 2x + 3} \leq \frac{3}{2}$

b. En déduire que : $\left| \frac{3}{x^2 - 2x + 3} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$

Exercice 7 :

Soit x un nombre réel .

On pose $E = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

- 1) Montrer que : $E - 1 = \frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2}$
- 2) En déduire que : $|E - 1| \leq \frac{1}{2}x^2$

- 3) Trouver une valeur approchée du nombre $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ d'amplitude 2×10^{-4}

Corrigé de l'exercice 1 :

1) Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

On a $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

donc $-1 \leq 2x \leq 2$

donc $2 \leq 2x+3 \leq 5$

et $\frac{3}{2} \leq x+2 \leq 3$

donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+2} \leq \frac{2}{3}$

d'où $\frac{2}{3} \leq \frac{2x+3}{x+2} \leq \frac{10}{3}$

Et par suite $\frac{2}{3} \leq A(x) \leq \frac{10}{3}$

2) a) Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

On a $a + \frac{b}{x+2} = \frac{ax+2a+b}{x+2}$

$A(x) = a + \frac{b}{x+2}$ équivaut à $\frac{2x+3}{x+2} = \frac{ax+2a+b}{x+2}$

équivaut à $2x+3 = ax+2a+b$

équivaut à $\begin{cases} a = 2 \\ 2a+b = 3 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

D'où $A(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$

b) Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

On a $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+2} \leq \frac{2}{3}$

donc $-\frac{2}{3} \leq -\frac{1}{x+2} \leq -\frac{1}{3}$

$$\text{donc } \frac{4}{3} \leq 2 - \frac{1}{x+2} \leq \frac{5}{3}$$

$$\text{et par suite } \boxed{\frac{4}{3} \leq A(x) \leq \frac{5}{3}}$$

3)

$$\checkmark \text{ L'encadrement } \boxed{\frac{2}{3} \leq A(x) \leq \frac{10}{3}} \text{ a pour amplitude } \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\checkmark \text{ L'encadrement } \boxed{\frac{4}{3} \leq A(x) \leq \frac{5}{3}} \text{ a pour amplitude } \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Donc le plus fin des deux encadrements précédents de $A(x)$ est $\frac{4}{3} \leq A(x) \leq \frac{5}{3}$ (car $\frac{1}{3} < \frac{8}{3}$)

Corrigé de l'exercice 2 :

$$1) \text{ On a } (2\sqrt{7})^2 - (3\sqrt{3})^2 = 28 - 27 = 1$$

$$\text{Donc } (2\sqrt{7})^2 - (3\sqrt{3})^2 > 0$$

$$\text{Donc } (2\sqrt{7})^2 > (3\sqrt{3})^2$$

$$\text{D'où } 2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$$

$$2) (3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2 = (3\sqrt{3})^2 - 2(3\sqrt{3})(2\sqrt{7}) + (2\sqrt{7})^2 = 27 - 12\sqrt{21} + 28 = 55 - 12\sqrt{21}$$

$$3) \text{ On a } A = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}} = \sqrt{(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2} = |3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}|$$

$$\text{Puisque } 3\sqrt{3} - 2\sqrt{7} < 0 \text{ alors } A = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$$

$$4) \text{ On a } 1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \text{ et } 2,6 < \sqrt{7} < 2,7$$

$$\text{Donc } 5,1 < 3\sqrt{3} < 5,4 \text{ et } 5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4$$

$$\text{Donc } -5,4 < -3\sqrt{3} < -5,1 \text{ et } 5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4$$

$$\text{Donc } -0,2 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} < 0,3$$

$$\text{Donc } -0,2 < A < 0,3$$

D'où $-0,2$ est une approximation de A par défaut d'amplitude $0,3 - (-0,2) = 0,5$

Et $0,3$ est une approximation de A par excès d'amplitude $0,3 - (-0,2) = 0,5$

Corrigé de l'exercice 3 :

1) On a $|a+2| \leq 1$

Donc $-1 \leq a+2 \leq 1$

Donc $-3 \leq a \leq -1$

Et on a $0 \leq b \leq 2$

Donc $-3 \leq a+b \leq 1$

Donc $-2 \leq a+b+1 \leq 2$

Et par suite $|a+b+1| \leq 2$

2)

✓ $(a+3)(b-2)+6 = ab-2a+3b-6+6 = ab-2a+3b = A$

✓ On $-3 \leq a \leq -1$ donc $0 \leq a+3 \leq 2$

Et on a $0 \leq b \leq 2$ donc $-2 \leq b-2 \leq 0$ donc $0 \leq -(b-2) \leq 2$

Donc $0 \leq -(a+3)(b-2) \leq 4$ donc $-4 \leq (a+3)(b-2) \leq 0$

D'où $2 \leq (a+3)(b-2)+6 \leq 6$

Et par suite $2 \leq A \leq 6$

Corrigé de l'exercice 4 :

1) Soit $x \in [4;6]$

On a $4 \leq x \leq 6$ donc $8 \leq 2x \leq 12$ donc $\boxed{11 \leq 2x+3 \leq 15}$

Et $2 \leq x-2 \leq 4$ donc $\boxed{\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2}}$

D'où $\boxed{\frac{11}{4} \leq \frac{2x+3}{x-2} \leq \frac{15}{2}}$

Et par suite $\boxed{\frac{11}{4} \leq A \leq \frac{15}{2}}$

2) a) $2 + \frac{7}{x-2} = \frac{2x-4+7}{x-2} = \frac{2x+3}{x-2} = A$

b) on a $4 \leq x \leq 6$

donc $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2}$

$$\text{donc } \frac{7}{4} \leq \frac{7}{x-2} \leq \frac{7}{2}$$

$$\text{donc } \frac{15}{4} \leq 2 + \frac{7}{x-2} \leq \frac{11}{2}$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{15}{4} \leq A \leq \frac{11}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 5 :

1)

✓ on a $b-a=2$ donc $a=b-2$
et on a $b \leq 5$ donc $b-2 \leq 3$ donc $a \leq 3$

✓ on a $b-a=2$ donc $b=a+2$
et on a $a \geq 2$ donc $a+2 \geq 4$ donc $b \geq 4$

$$2) A = \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(b-4)^2} = |a-3| + |b-4|$$

On a $a \leq 3$ donc $a-3 \leq 0$ donc $|a-3| = 3-a$

Et on a $b \geq 4$ donc $b-4 \geq 0$ donc $|b-4| = b-4$

D'où $A = 3-a+b-4 = b-a-1 = 2-1 = 1$

$$3) B = |a+b-6| + |a+b-8|$$

On a $2 \leq a \leq 3$ et $4 \leq b \leq 5$

Donc $6 \leq a+b \leq 8$

Donc $0 \leq a+b-6$ et $a+b-8 \leq 0$

$$\text{Donc } \begin{cases} |a+b-6| = a+b-6 \\ |a+b-8| = -a-b+8 \end{cases}$$

Donc $B = a+b-6 - a-b+8$

D'où $B = 2$

Corrigé de l'exercice 6 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$(x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x$$

2) On a $1 \leq x \leq 3$

$$\text{Donc } 0 \leq x-1 \leq 2$$

$$\text{Donc } 0 \leq (x-1)^2 \leq 4$$

$$\text{Donc } -1 \leq (x-1)^2 - 1 \leq 3$$

$$\text{d'où } -1 \leq x^2 - 2x \leq 3$$

$$3) \text{ a) on a } -1 \leq x^2 - 2x \leq 3$$

$$\text{donc } 2 \leq x^2 - 2x + 3 \leq 6$$

$$\text{donc } \frac{1}{6} \leq \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} \leq \frac{3}{x^2 - 2x + 3} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{b) on a } \frac{1}{2} \leq \frac{3}{x^2 - 2x + 3} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{donc } -\frac{1}{2} \leq \frac{3}{x^2 - 2x + 3} - 1 \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \left| \frac{3}{x^2 - 2x + 3} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$$

Corrigé de l'exercice 7 :

$$1) \text{ Soit } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} E-1 &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \\ &= \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{1+x^2})(1 + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}(1 + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{1 - (1+x^2)}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2} \\ &= \frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2} \end{aligned}$$

$$2) \text{ On a } |E-1| = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2}$$

$$\text{On a } x^2 \geq 0$$

$$\text{Donc } 1+x^2 \geq 1 \text{ et } \sqrt{1+x^2} \geq 1$$

$$\text{Donc } \sqrt{1+x^2} + 1 + x^2 \geq 2$$

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2} \leq \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{D'où } |E-1| \leq \frac{1}{2}x^2$$

3) On a pour tout x de \mathbb{R} $|E-1| \leq \frac{1}{2}x^2$

$$\text{Donc } \left| \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}x^2$$

Prenons $x = 0,02$

$$\text{Donc } \left| \frac{1}{\sqrt{1+(0,02)^2}} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}(0,02)^2$$

$$\text{Donc } \left| \frac{1}{\sqrt{1,0004}} - 1 \right| \leq 2 \times 10^{-4}$$

D'où 1 est une valeur approchée du nombre $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ d'amplitude 2×10^{-4}

つづく