

Tronc Commun

Série 1 : Calcul vectoriel

Exercice 1 :

$ABCD$ est un parallélogramme

M et N et P trois points tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

1. Montrer que : $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$
2. Montrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AP}$
3. Montrer que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AN}$

Exercice 2 :

Soient A ; B ; C et M quatre points du plan.

Soit $\vec{U} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

1. Montrer que : $\vec{U} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

2. Soit $\vec{V} = 2\overrightarrow{BA} - 6\overrightarrow{BC}$

Montrer que \vec{U} et \vec{V} sont colinéaires .

Exercice 3 :

ABC est un triangle , les points D et E sont tels que :

$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{BA}$

Montrer que le point C est le milieu du segment $[DE]$

Exercice 4 :

$ABCD$ est un parallélogramme

Soient E et F deux points tels que :

$\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Montrer que :

$\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Et $\overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

2. En déduire que les points E ; C et F sont alignés

Corrigé de l'exercice 1 :

1.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} \\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

2. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

Et d'après le résultat de la question 1. : $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

Et par suite $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

3. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})\end{aligned}$$

Et puisque $ABCD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

D'où $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AN}$ (car $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$)

Corrigé de l'exercice 2 :

1.

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}\vec{V} &= 2\vec{BA} - 6\vec{BC} \\ &= 2\vec{BA} - 6\vec{BA} - 6\vec{AC} \\ &= -4\vec{BA} - 6\vec{AC} \\ &= 4\vec{AB} - 6\vec{AC} \\ &= 2(2\vec{AB} - 3\vec{AC}) \\ &= 2\vec{U}\end{aligned}$$

Donc \vec{U} et \vec{V} sont colinéaires.

Corrigé de l'exercice 3 :

On a :

$$\begin{aligned}\vec{CD} + \vec{CE} &= \vec{CA} + \vec{AD} + 3\vec{BA} \\ &= -\vec{AC} + 3\vec{AB} + \vec{AC} - 3\vec{AB} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Donc le point C est le milieu du segment $[DE]$

Corrigé de l'exercice 4 :

1. On a :

$$\begin{aligned}\vec{CE} &= \vec{CB} + \vec{BE} \\ &= \vec{DA} + \frac{1}{3}\vec{AB} \\ &= -\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AB}\end{aligned}$$

Et , on a :

$$\begin{aligned}\vec{CF} &= \vec{CA} + \vec{AF} \\ &= \vec{CD} + \vec{DA} + 4\vec{AD} \\ &= -\vec{AB} - \vec{AD} + 4\vec{AD} \\ &= 3\vec{AD} - \vec{AB}\end{aligned}$$

2.

Puisque $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ Et $\overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

Alors $\overrightarrow{CF} = -3\overrightarrow{CE}$

Donc \overrightarrow{CF} et \overrightarrow{CE} sont colinéaires

Et par suite les points E ; C et F sont alignés

つづく