Exercices sur les vecteurs

EXERCICE 1 :

En décomposant $\overrightarrow{CB}$ en $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$, exprimer les vecteurs suivants en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{v} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$.

EXERCICE 2 :

ABCD est un quadrilatère convexe ; I est le milieu de [AB], J celui de [BC], K celui de [CD] et L celui de [DA].

1. *Comparer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.*
2. *En déduire la nature du quadrilatère IJKL.*

EXERCICE 3 :

ABC est un triangle ; A' est le milieu de [BC].

On se propose de démontrer la propriété :

« Dire que G est le centre de gravité de ABC équivaut à dire que G est le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. »

1. *Quelle égalité vectorielle entre $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA'}$ caractérise le centre de gravité ?*
2. *a) Prouver que : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$.*

   b) En déduire que : « $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$ équivaut à : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ ».Conclure.

EXERCICE 4 :

ABC est un triangle tel que le point A' est le milieu de [BC], B' celui de [CA] et C' celui de [AB].

1. *a) Justifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$.*

   b) De même, exprimer $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ en fonction d'un seul vecteur.
2. *En déduire que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$.*

EXERCICE 5 :

ABC est un triangle ; I est le milieu de [AB].

1. *a) Construire le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$.*

   b) En déduire que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
2. *On note K le point tel que $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$.*

   a) Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Construire K.

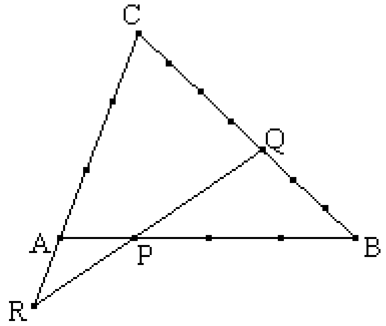
   b) En déduire que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et que $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IK}$.

Que dire alors des points I, J et K ?

EXERCICE 6 :

ABC est un triangle ; P est un point de (AB), Q un point de (BC) et R un point de (AC) disposés comme sur le dessin. (Les graduations sur les droites sont régulières.)

1. *Donner les valeurs des réels α, β et γ tels que :*
   $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AR} = \beta\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BQ} = \gamma\overrightarrow{BC}$.
2. *Exprimer $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.*
3. *Démontrer que $\overrightarrow{PQ} = \frac{9}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$.*
4. *Justifier que $\overrightarrow{PQ} = -\frac{9}{7}\overrightarrow{PR}$. Que conclure ?*



EXERCICE 7 :

OIJK est un parallélogramme. A, B et G sont trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

Choisir un repère pour démontrer que les points O, G et J sont alignés