

La droite dans le plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 01 :

- Etudier la colinéarité de \vec{u} et \vec{v} dans les cas suivants :
 - $\vec{u}(3;7)$; $\vec{v}(1;2)$.
 - $\vec{u}(\sqrt{3};-1)$; $\vec{v}(\frac{1}{2};\sqrt{2})$.
- Etudier l'alignement des points A , B et C dans les cas suivants :
 - $A(-4;2)$; $B(5;1)$; $C(11;3)$.
 - $A(-2;3)$; $B(3;-1)$; $C(7;-4)$.

Exercice 02 :

- Construire la droite (D) passant par $A(0;1)$ et dirigé par $\vec{u}(1;1)$.
- Construire la droite (Δ) passant par $B(-1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-1;2)$.
- Déterminer les vecteurs directeurs de l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Exercice 03:

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et dirigé par \vec{u} dans les cas suivants :

- $A(-1;2)$; $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.
- $A(2;-3)$; $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$.
- $A(1;0)$; $\vec{u}(5;-7)$.

Exercice 04:

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et dirigé par \vec{u} dans les cas suivants :

- $A(-1;2)$; $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.
- $A(2;-3)$; $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$.
- $A(1;0)$; $\vec{u}(5;-7)$.

Exercice 05 :

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) définie par sa représentation paramétrique dans les cas suivants :

- $(D) : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.
- $(D) : \begin{cases} x = -2k \\ y = \frac{5}{2} + 3k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.

Exercice 06 :

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) définie par son équation cartésienne dans les cas suivants :

- $(D) : 3x - 2y + 2 = 0$.
- $(D) : 2x + 3y - 2 = 0$.
- $(D) : x + 2y = 0$.
- $(D) : -7x - 3y + 6 = 0$.

Exercice 07 :

Soient $A(-6;-1)$; $B(2;3)$ et $C(9;6)$ trois points dans le plan, déterminer une représentation paramétrique et une équation cartésienne des droites suivantes (AB) , (AC) et (BC) .

Résumé du cours

○ **Repère du plan** : Deux droites $D(O,I)$ et $D(O,J)$ gradués et sécantes et qui ont la même origine constituent un repère noté (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) .

La droite $D(O,I)$ s'appelle l'axe des abscisses.

La droite $D(O,J)$ s'appelle l'axe des ordonnées.

On dit que le plan est muni du repère (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) .

Le couple (\vec{OI}, \vec{OJ}) s'appelle base du plan.

Si (OI) et (OJ) sont orthogonaux, on dit que

(O, \vec{OI}, \vec{OJ}) est orthogonal.

Si $(OI) \perp (OJ)$ et $\|\vec{OI}\| = \|\vec{OJ}\| = 1$, on dit que (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) est orthonormé.

○ **Coordonnées d'un point- Coordonnées d'un vecteur**

-Soit M un point du plan, si A est le projeté du point M sur $D(O, \vec{i})$ parallèlement à $D(O, \vec{j})$ alors

$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$ avec $\vec{OA} = x\vec{i}$ et $\vec{OB} = y\vec{j}$. Le couple

(x, y) s'appelle les coordonnées du point M (ou du vecteur \vec{OM}) noté par $M(x, y)$.

-Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors :

$$\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A).$$

-Si I est le milieu de $[AB]$ alors :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

○ **Norme d'un vecteur-Distance de deux points**

-Si $\vec{u}(x, y)$ est un vecteur, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

-Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

○ **Colinéarité de deux vecteurs**

-Déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x_1, y_1)$ et $\vec{v}(x_2, y_2)$

est le réel $x_1 y_2 - x_2 y_1$, noté par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

-Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

○ **Une droite définie par un point et un vecteur directeur**

$$\mathcal{D}(A, \vec{u}) = \{M \in \mathcal{P} / \det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0\}$$

○ **Représentation paramétrique d'une droite :**

Le système $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est appelé

représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$

passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, \beta)$.

○ **Equation cartésienne d'une droite :**

-Soit $M(x, y) \in \mathcal{D}(A, \vec{u})$ alors $\det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0$ équivaut à une équation de la forme $ax + by + c = 0$ tel que :

$$(a, \beta) = (-b, a) \text{ et } c = -ax_A - by_A.$$

○ **Positions relatives de deux droites :**

- $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}(B, \vec{v})$ sont parallèles ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

- $(D) : ax + by + c = 0$ et $(\Delta) : a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

-Si les droites (D) et (Δ) sont sécantes alors le point d'intersection est la solution du système :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Exercice 08 :

Etudier l'intersection de deux droites (D) et (D') dans les cas suivants :

- 1) $(D) : \begin{cases} x = 4 - 3k \\ y = 1 + 2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$ et $(D') : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.
- 2) $(D) : 2x - y + 3 = 0$ et $(D') : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.
- 3) $(D) : 2x + y - 3 = 0$ et $(D') : x - y + 1 = 0$.

Exercice 09 :

Soient $A(-2; -1)$ et $B\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ deux points dans le plan.

- 1) A) Donner une équation cartésienne de la droite (AB) .
B) Déterminer le couple des coordonnées de point I l'intersection de la droite (AB) et l'axe des abscisses.
- 2) Soit (Δ) la droite définie par sa représentation paramétrique suivante :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -4 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

- A) Etablir que le point B appartient à la droite (Δ) .
 - B) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) .
- 3) Construire les droites (Δ) et (AB) .

Exercice 10 :

Soit ABC un triangle dans le plan.

- 1) Construire les points L , M et N tel que : $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$; $\overline{MB} = \frac{1}{3}\overline{MA}$; $\overline{CL} = \frac{1}{4}\overline{CA}$.
- 2) Déterminer les coordonnées des points L , M et N dans le repère $(A, \overline{AB}, \overline{AC})$.
- 3) Ecrire une équation cartésienne de la droite (LM) .
- 4) Montrer que les points L , M et N sont alignés.

Exercice 11 :

Soient $A(-2,1)$, $B(2,4)$, $\vec{u}(5,2)$, $(D) : 2x - 3y + 1 = 0$ et $(D_m) : (m-1)x - 2my + 3 = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$.

- 1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .
- 2) Vérifier que (D) et (Δ) sont sécantes et déterminer leur intersection.
 - A) Déterminer la valeur de m pour que (D) et (D_m) soient en parallèle.
 - B) Déterminer la valeur de m pour que $B \in (D_m)$.
- 3) A) Construire (D_0) , (D_1) et (D_2) .
B) Montrer que toutes les droites (D_m) passent par le point $C\left(3, \frac{3}{2}\right)$.

Exercice 12 :

Soit $ABCD$ un trapèze a bases $[AB]$ et $[CD]$, I le point d'intersection de ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$, J le point d'intersection de ses côtés $[AD]$ et $[BC]$.

On munit le plan d'un repère $(A, \overline{AB}, \overline{AD})$ et on pose $x_C = a$ (l'abscisse de point C).

- 1) Donner des équations cartésiennes des droites (AC) et (BD) puis vérifier que $\left(\frac{a}{a+1}; \frac{1}{a+1}\right)$ est le couple des coordonnées de point I .
- 2) Donner des équations cartésiennes des droites (AD) et (BC) puis déterminer le couple des coordonnées de point J .