

Instructions au candidat(e)	تعليمات للمترشح(ة)
Important : Le candidat est invité à lire et suivre attentivement ces recommandations.	هام: يتعين على المترشح(ة) قراءة هذه التوجيهات بدقة والعمل بها.
Le document que vous avez entre les mains est de 5 pages : la première est réservée aux recommandations.	تتكون الوثيقة التي بين يديك من خمس صفحات : الأولى منها خاصة بالتوجيهات.
• Répondre aux questions du sujet avec précision et soin ;	• يتعين عليك الإجابة عن أسئلة الموضوع بما تستحقه من دقة وعناية؛
• L’usage de la calculatrice scientifique non programmable est autorisé ;	• يسمح لك باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة؛
• <u>Vous devez justifier les résultats</u>	• <u>ينبغي عليك تعليل النتائج</u>
• Vous pouvez répondre aux exercices selon l’ordre que vous choisissez, mais veuillez respecter la numérotation des exercices et des questions dans le sujet ;	• يمكنك الإجابة على التمارين وفق الترتيب الذي تختاره (تختارينه)، لكن يتعين عليك في ترقيم أجوبتك، اعتماد نفس ترقيم التمارين والأسئلة، الوارد في الموضوع؛
• Veillez à la bonne présentation de votre copie et à une écriture lisible ;	• ينبغي عليك العمل على حسن تقديم الورقة والكتابة بخط مقروء؛
• Il est souhaitable que les pages soient numérotées pour faciliter la correction ;	• يستحسن ترقيم صفحات أوراق التحرير ضمنا لتيسير عملية التصحيح؛
• Eviter l’écriture au stylo rouge ;	• يتعين تجنب الكتابة بقلم أحمر؛
• Assurez-vous que vous avez traité tous les exercices avant de quitter la salle d’examen.	• تحقق(ي) من معالجتك لكل تمارين الموضوع قبل مغادرة قاعة الامتحان.

Exercice n°1:(1.25 pts)

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $w_0 = 5$ et $w_{n+1} = 3w_n - 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 0.5 1. Calculer w_1 et w_2
- 0.5 2. Montrer par récurrence que $w_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$
- 0.25 3. En déduire que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Exercice n°2:(2.25 pts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n + 2}{-2u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

On pose $v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 0.25 1. Calculer v_0
- 0.25 2. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{4u_n + 1}{u_n + 1}$
- 0.5 2. b. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 2$
- 0.5 2. c. Donner v_n en fonction de n
- 0.25 3. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{1 + v_n}{2 - v_n}$
- 0.25 3. b. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n + 2}{-2n + 1}$
- 0.25 3. c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice n°3:(1 pt)

$(\Omega; p)$ est un espace probabilisé fini et X la variable aléatoire représentée par la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

x_i	2	t	5
$p(X = x_i)$	y	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

- 0.5 1. Calculer y
- 0.5 2. Sachant que $E(X) = \frac{23}{6}$, trouver la valeur de t

Exercice n°4:(2 pts)

Les 100 élèves d'un établissement (60 filles et 40 garçons) sont répartis selon la taille et le sexe suivant le tableau ci-dessous :

Taille en m Sexe	Taille < 1,60	Taille $\geq 1,60$	Total
Garçons	16	24	40
Filles	51	9	60
Total	67	33	100

On choisit au hasard un élève (fille ou garçon) et l'on considère les événements suivants :

A : « L'élève choisi est un garçon »

B : « L'élève choisi est une fille »

C : « La taille de l'élève choisi est supérieure ou égale à 1,60m »

0.5 1. Montrer que $p(A) = \frac{4}{10}$

1 2. a. Calculer $p(B)$ et $p(C \cap B)$

0.5 2. b. En déduire que $p_B(C) = \frac{3}{20}$ ($p_B(C)$ se lit : la probabilité de C sachant B)

Exercice n°5:(3 pts)

0.75 1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\square$ l'équation (E): $z^2 + \sqrt{6}z + 2 = 0$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ direct, on considère les

points A(a), B(b) et C(c) d'affixes respectives $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3} + i)$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - i)$

et $c = \sqrt{2}i$

0.5 2. a. Vérifier que $a - c = \frac{-\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$ et $b - c = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 3i)$

1 2. b. Montrer que $\frac{b-c}{a-c} = \sqrt{3}i$

0.75 2. c. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C et non isocèle.

Exercice n°6:(2.5pts)

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

On considère les points A(1;0;2), B(-1;2;2), C(-5;2;0) et le vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{k}$

0.25 1.a. Vérifier que $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$

0.5 1.b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.

2. Soit le plan $(P) = P(A; \overrightarrow{AB}; \vec{u})$

1 2. a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $x + y + 2z - 5 = 0$

0.25 2. b. Vérifier que $C \notin (P)$

0.5 2. c. En déduire l'intersection des deux plans (P) et (ABC)

Exercice n°7:(1.5 pts) (Les questions 1. et 2. sont indépendantes)

On rappelle que si f est une fonction dérivable en x_0 alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

0.5 1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$ (Remarquer que $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x+1} \times \frac{\ln x}{x-1}$);

0.25 2. a. Vérifier que pour tout nombre réel x non nul :

$$\frac{xe^x}{e^{2x} - 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} \times \frac{x}{e^x - 1}$$

0.75 2. b. En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^x}{e^{2x} - 1} \right) = \frac{1}{2}$

Exercice n°8:(4 pts)

Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 1 - (x+1)^2 e^{-x}$$

1 1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $h'(x) = (x-1)(x+1)e^{-x}$

1 2. a. Etudier le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$

0.5 2. b. Calculer $h(1)$ et $h(-1)$

0.5 2. c. Dresser le tableau de variations de h (Les limites aux bornes ne sont pas demandées)

3. A l'aide du tableau de variations de h , montrer que pour tout x de $[-1; +\infty[$:

1 $(x+1)^2 \leq 4e^{x-1}$

Exercice n°9:(2.5pts)

Dans la figure ci-dessous (C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives, dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, des fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par :

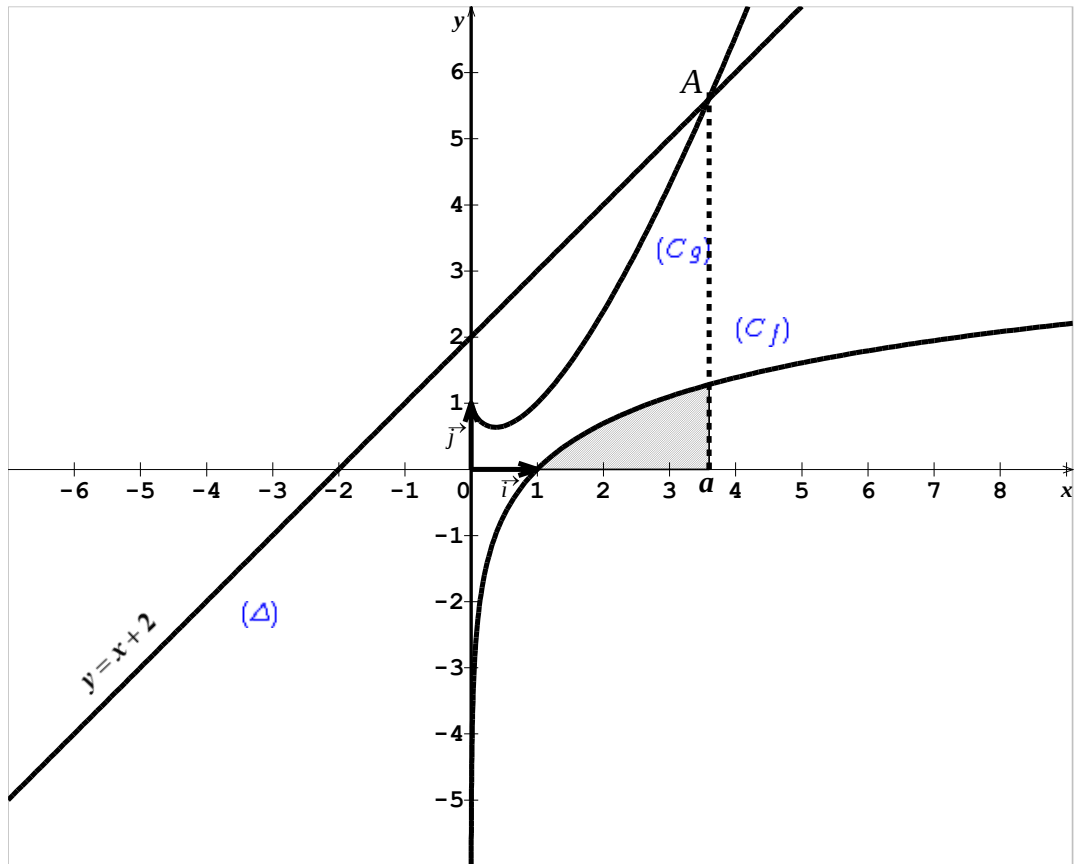
$$f(x) = \ln x \text{ et } g(x) = 1 + x \ln x$$

(Δ) est la droite d'équation : $y = x + 2$ et A le point d'intersection de (C_g) et (Δ) d'abscisse a

0.5 1. Vérifier que : $a + 1 = a \ln a$

1 2. a. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^a \ln x \, dx = a \ln a - a + 1$

1 2. b. En déduire que l'aire de la partie hachurée est égale à 2 en unité d'aire.



Exercice n°3:(1 pt)

Questions	Détails d'éléments de réponses et barème	Notes partielles	Total	Observations							
$(\Omega; p)$ est un espace probabilisé fini et X la variable aléatoire représentée par la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :											
	<table><tr><td>x_i</td><td>2</td><td>t</td><td>5</td></tr><tr><td>$p(X=x_i)$</td><td>y</td><td>$\frac{2}{6}$</td><td>$\frac{3}{6}$</td></tr></table>	x_i	2	t	5	$p(X=x_i)$	y	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$		
x_i	2	t	5								
$p(X=x_i)$	y	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$								
1	$y = \frac{1}{6}$	0.5	0.5								
2	$t = 3$	0.5	0.5								

Exercice n°4 :(2 pts)

Questions	Détails d'éléments de réponses et barème	Notes partielles	Total	Observations
100 élèves (60 filles et 40 garçons).				
1	On montre que $p(A) = \frac{4}{10}$	0.5	0.5	
2.a	$p(B) = \frac{6}{10}$	0.5	1	
	$p(C \cap B) = \frac{9}{100}$	0.5		
2.b	On déduit que $p_B(C) = \frac{3}{20}$	0.5	0.5	

Exercice n°5:(3 pts)

1	Les solutions de l'équation $(E): z^2 + \sqrt{6}z + 2 = 0$ sont : $\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{2}$ et $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{2}$	0.25+0.25 + 0.25	0.75	
2.a	On vérifie que $a - c = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$ et $b - c = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 3i)$	2x0.25	0.5	
2.b	On montre que $\frac{b-c}{a-c} = \sqrt{3}i$	1	1	
2.c	On montre que le triangle ABC est rectangle en C	0.5	0.75	
	Le triangle ABC est non isocèle car $AC \neq CB$	0.25		

Exercice n°6:(2.5 pts)

Questions	Détail des éléments de réponses et barème	Notes partielles	Total	Observations
L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ On considère les points $A(1;0;2)$, $B(-1;2;2)$, $C(-5;2;0)$ et le vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{k}$ L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ On considère les points $A(1;0;2)$, $B(-1;2;2)$, $C(-5;2;0)$ et le vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{k}$				
1.a	On vérifie que $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$	0.25	0.25	
1.b	On montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires	0.5	0.5	
	2. Soit le plan $P(A; \overrightarrow{AB}; \vec{u})$			
2.a	On montre qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $x + y + 2z - 5 = 0$	1	1	
2.b	On vérifie que $C \notin (P)$	0.25	0.25	
2.c	On déduit que l'intersection des deux plans (P) et (ABC) est la droite (AB)	0.5	0.5	

Exercice n°7:(1.5 pts)

Questions	Détail des éléments de réponses et barème	Notes partielles	Total	Observations
1	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$	0.5	0.5	Tenir compte de la justification
2.a	On vérifie que pour tout nombre réel x non nul : $\frac{xe^x}{e^{2x} - 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} \times \frac{x}{e^x - 1}$	0.25	0.25	
2.b	On déduit que : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^x}{e^{2x} - 1} \right) = \frac{1}{2}$	0.75	0.75	Tenir compte de la justification

Exercice n°8:(4 pts)

Questions	Détail des éléments de réponses et barème	Notes partielles	Total	Observations
Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur IR par : $h(x) = 1 - (x+1)^2 e^{-x}$				
1	On montre que pour tout x de IR : $h'(x) = (x-1)(x+1)e^{-x}$	1	1	
2.a	L'étude du signe de $h'(x)$ sur IR	1	1	
2.b	$h(1) = 1 - \frac{4}{e}$ et $h(-1) = 1$	2x0.25	0.5	
2.c	Dresser le tableau de variations de h	0.5	0.5	

3	On montre que pour tout x de $[-1; +\infty[: (x+1)^2 \leq 4e^{x-1}$	1	1	0.25 si on signale qu'à partir du tableau de variations, $h(1) = \frac{e-4}{e}$ est une valeur minimale sur $[-1; +\infty[$
Exercice n° 9:(2.5 pts)				
Questions	Détail des éléments de réponses et barème	Notes partielles	Total	Observations
Dans la figure ci-dessous (C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives, dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, des fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln x$ et $g(x) = 1 + x \ln x$ (Δ) est la droite d'équation : $y = x + 2$ et $A(a; g(a))$ le point d'intersection de (C_g) et (Δ)				
1	On vérifie que $a+1 = a \ln a$	0.5	0.5	
2.a	On montre en utilisant une intégration par parties	1	1	0.25 pour l'intégration par parties
2.b	On déduit que l'aire de la partie hachurée est $A = 2u.a$	1	1	