المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2023

RS 24 | الموضوع | sssssssssssssssssss-sss

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

تعليمات:

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.
- يتضمن موضوع الاختبار أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن أن تنجز التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين1 يتعلق بالتحليل.....(10 نقط)
- التمرين2 يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 نقطة)
- التمرين3 يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 نقطة)
- التمرين4 يتعلق بالحسابيات.....(3 نقط)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر

التمرين1 : (10 نقط)

الجزء I:

لكل عدد صحيح طبيعي **غير منعدم** n ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بما يلي :

$$f_n(0)=0 \quad \text{و} \quad f_n(x)=\sqrt{x}(\ln x)^n \quad ; \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$$

وليكن (C_n) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 1- أ) تحقق أن: $\sqrt{x}(\ln x)^n=(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$; $(\forall x\in]0,+\infty[)$ ، استنتج أن f_n متصلة على اليمين في 0

0.25 ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

0.75 ج) تحقق أن: $\frac{f_n(x)}{x}=(2n)^n\left(\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$; $(\forall x\in]0,+\infty[)$ ، استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.5 د) احسب، حسب زوجية n ، $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f_n(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

2- أ) بين أن f_n قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن :

0.75 $$f_n'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n+\ln x) \quad ; \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$$

0.25 ب) تحقق أن لكل $n\geq 2$: $f_n'(x)=0$ تكافئ $(x=1$ أو $x=e^{-2n})$

1 ج) ادرس، حسب زوجية n ، منحى تغيرات f_n و اعط جدول تغيراتها.

0.25 د) بين أنه إذا كان n فرديا و $n\geq 3$ فإن النقطة ذات الأفصول 1 هي نقطة انعطاف (C_n)

الجزء II:

1- ليكن $\beta\in]1,e[$ عددا حقيقيا ثابتا. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي :

$$u_n=f_n(\beta) \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

0.25 أ) بين أن: $0<u_n<\sqrt{e}$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

0.25 ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ تناقصية.

0.25 ج) حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

0.5 2- أ) بين أنه لكل عدد صحيح n غير منعدم، يوجد عدد حقيقي وحيد $x_n\in]1;e[$ بحيث: $f_n(x_n)=1$

0.75 ب) بين أن المتتالية المعرفة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية، استنتج أنها متقاربة.

3- نضع: $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

0.5 أ) بين أن: $1 < \ell \leq e$

0.25 ب) بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$

0.25 ج) بين أنه إذا كان $\ell < e$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ln x_n) = -\infty$

0.25 د) استنتج قيمة ℓ

الجزء III:

نضع لكل $x \in I$ ، $F(x) = \int_x^1 \left(f_1(t)\right)^2 dt$

0.25 1- أ) بين أن الدالة F متصلة على I

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء مرتين، بين أن:

1 $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right);\ F(x) = -\dfrac{x^2}{2}\ln^2(x) + \dfrac{x^2}{2}\ln(x) + \dfrac{1}{4}(1-x^2)$

0.5 2- أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$

0.25 ب) استنتج قيمة $F(0)$

0.5 ج) احسب، ب cm^3، حجم المجسم المولد بدوران جزء المنحنى (C_1) الموافق للمجال $[0,1]$ دورة كاملة حول محور الأفاصيل. (نأخذ $\left\|\vec{i}\right\| = 1cm$)

التمرين2: (3.5 نقطة)

يمكن أن ينجز الجزءان I و II بشكل مستقل.

الجزء I:

نعتبر في $\mathbb{R}_+^2$ النظمة التالية: $(S):\begin{cases}\sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{12}{5}\\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{4}{5}\end{cases}$

1- ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ حلا للنظمة (S) . نضع: $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$

0.25 أ) بين أن: $z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{12}{5} + \dfrac{4}{5}i$

0.75 ب) بين أن: $z^2 - \left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)z + 1 = 0$ ، استنتج القيم الممكنة للعدد z

(نلاحظ أن: $\dfrac{28}{25}+\dfrac{96}{25}i = \left(\dfrac{2}{5}(4+3i)\right)^2$)

0.25 ج) استنتج قيم الزوج (x,y)

0.5 2- حل في $\mathbb{R}_+^2$ النظمة (S)

الجزء II:

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

لتكن (U) الدائرة التي مركزها O و شعاعها 1 و $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ثلاث نقط مختلفة مثنى مثنى من (U)

0.25 | 1- بين أن: $\left(\forall z\in\mathbb{C}\right)\ ;\ |z|=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$

0.5 | 2- أ) المستقيم المار من A و الموازي للمستقيم (BC) يقطع الدائرة (U) في النقطة $P(p)$

بين أن: $p=\dfrac{bc}{a}$

0.5 | ب) المستقيم المار من A و العمودي على المستقيم (BC) يقطع الدائرة (U) في النقطة $Q(q)$

بين أن: $q=-p$

0.5 | ج) المستقيم المار من C و الموازي للمستقيم (AB) يقطع الدائرة (U) في النقطة $R(r)$

بين أن المستقيمين (PR) و (OB) متعامدان.

<u>التمرين3:</u> (3.5 نقطة)

نذكر أن $\left(M_3(\mathbb{C}),+,\times\right)$ حلقة واحدية و غير تبادلية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ليكن $E=\left\{M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&-c\\0&c&b\end{pmatrix}/\,(a,b,c)\in\mathbb{C}^3\right\}$

0.25 | 1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $\left(M_3(\mathbb{C}),+\right)$

2- نزود المجموعة $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي:

$$\forall\left((x,z),(x',z')\right)\in(\mathbb{C}\times\mathbb{C})^2\ ;\ (x,z)*(x',z')=(x+x',z+z')$$

و نعتبر التطبيق φ المعرف من E نحو $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ بما يلي:

$$\forall(a,b,c)\in\mathbb{C}^3\ ,\ \varphi\left(M(a,b,c)\right)=(a,b+ci)$$

0.5 | أ) بين أن φ تشاكل من $(E,+)$ نحو $(*,\mathbb{C}\times\mathbb{C})$ و أن $\varphi(E)=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$

0.25 | ب) استنتج أن $(*,\mathbb{C}\times\mathbb{C})$ زمرة تبادلية.

3- نزود $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي:

$$\forall\left((x,z),(x',z')\right)\in(\mathbb{C}\times\mathbb{C})^2\ ;\ (x,z)T(x',z')=\left(x\mathrm{Re}(z')+x'\mathrm{Re}(z),zz'\right)$$

($\mathrm{Re}(z)$ هو الجزء الحقيقي للعدد العقدي z)

0.25 | أ) بين أن T تبادلي.

0.25 | ب) تحقق أن $(0,1)$ هو العنصر المحايد للقانون T في $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$

0.5 | ج) تحقق أن $(1,i)T(x,-i)=(0,1)$ ؛ $\forall x\in\mathbb{C}$, استنتج أن T غير تجميعي في $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$

4- ليكن $G=\{(\mathrm{Im}(z),z)/z\in\mathbb{C}^*\}$
($\mathrm{Im}(z)$ هو الجزء التخيلي للعدد العقدي z)

0.25 أ) بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C},*)$
(نلاحظ أن $(-\mathrm{Im}(z),-z)$ هو مماثل $(\mathrm{Im}(z),z)$ بالنسبة للقانون $*$)

0.25 ب) ليكن ψ التطبيق المعرف من $\mathbb{C}^*$ نحو $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ بما يلي: $\forall z\in\mathbb{C}^*\ ;\ \psi(z)=(\mathrm{Im}(z),z)$
بين أن ψ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C},T)$

0.5 ج) استنتج أن $(G-\{(0,0)\},T)$ زمرة تبادلية.

0.5 5- بين أن $(G,*,T)$ جسم تبادلي.

التمرين4: (3 نقط)

ليكن p عددا أوليا فرديا. نضع: $S=1+p+p^2+p^3+\ldots+p^{p-1}$

ليكن q عددا أوليا يقسم S

0.5 1- أ) بين أن p و q أوليان فيما بينهما.

0.25 ب) استنتج أن: $p^{q-1}\equiv 1\ [q]$

0.5 ج) تحقق أن: $p^p-1=(p-1)S$ ، استنتج أن: $p^p\equiv 1\ [q]$

2- نفترض أن p و $q-1$ أوليان فيما بينهما.

0.75 أ) باستعمال مبرهنة بوزوت (Bézout)، بين أن: $p\equiv 1\ [q]$

0.25 ب) استنتج أن $S\equiv 1\ [q]$

0.75 3- بين أن: $q\equiv 1\ [p]$

انتهى

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2023

RR 24 | عناصر الإجابة | sssssssssssssssssss-sss

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

التمرين1			عناصر الإجابة	سلم التنقيط
I	-1	أ)	تحقق.....	0.25
			استنتاج.....	0.25
		ب)	حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$	0.25
		ج)	تحقق.....	0.25
			استنتاج.....	0.25
			تأويل مبياني.....	0.25
		د)	حساب $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f_n(x)}{x}$	0.25
			تأويل مبياني.....	0.25
	-2	أ)	اشتقاق f_n على $]0;+\infty[$	0.25
			حساب $f_n'(x)$	0.5
		ب)	تحقق.	0.25
		ج)	دراسة تغيرات f_n حسب زوجية n	2x0.5
		د)	إذا كان n فرديا و $n\geq3$ فإن النقطة ذات الأفصول 1 هي نقطة انعطاف (C_n)	0.25
II	-1	أ)	البرهنة على: $0<u_n<\sqrt{e}$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$	0.25
		ب)	تناقصية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$	0.25
		ج)	تحديد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	0.25
	-2	أ)	الوجود و الوحدانية.	0.5
		ب)	تزايدية المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$	0.5
			استنتاج تقارب $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$	0.25
	-3	أ)	البرهنة على: $1\leq\ell\leq e$	0.25
			البرهنة على: $\ell\neq1$	0.25

		ب)	البرهنة على: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln x_n)^n=\dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$	0.25
		ج)	البرهنة على: $\ell<e \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ln x_n)=-\infty$	0.25
		د)	استنتاج قيمة ℓ	0.25
III	-1	أ)	اتصال الدالة F على المجال I	0.25
		ب)	تطبيق المكاملة بالأجزاء مرتين.	2x0.5
	-2	أ)	حساب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)$	0.5
		ب)	استنتاج $F(0)$	0.25
		ج)	حجم المجسم.	0.5

التمرين2			عناصر الإجابة	سلم التنقيط
I	-1	أ)	البرهنة على: $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i$	0.25
		ب)	البرهنة على المتساوية: $z^2-\left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)z+1=0$	0.25
			استنتاج القيم الممكنة للعدد z	0.5
		ج)	استنتاج قيم الزوج (x,y)	0.25
	-2		حل النظمة (S) في $\mathbb{Z}^2$	0.5
II	-1		البرهنة على التكافؤ.	0.25
	-2	أ)	البرهنة على: $p=\dfrac{bc}{a}$	0.5
		ب)	البرهنة على: $q=-p$	0.5
		ج)	البرهنة على: $(PR)\perp(OB)$	0.5

التمرين3			عناصر الإجابة	سلم التنقيط
-1			E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}),+)$	0.25
-2		أ)	φ تشاكل من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C}^*,\times)$	0.25
			$\varphi(E)=\mathbb{U}$	0.25
		ب)	$(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية.	0.25
-3		أ)	T تبادلي.	0.25
		ب)	تحقق.	0.25
		ج)	$T(x,-i)=(1,i)$, $\forall x\in\mathbb{R}$	0.25
			T غير تجميعي.....	0.25

-4	أ)	G زمرة جزئية للزمرة $(*, \pounds\ ´\ ¡)$	0.25
	ب)	ψ تشاكل من $(\times, ^* \square)$ نحو $(T, \pounds\ ´\ ¡)$	0.25
	ج)	$(G- \{(0,0)\}, T)$ زمرة تبادلية.	0.5
-5		$(G, *, T)$ جسم تبادلي.	0.5

التمرين4		عناصر الإجابة	سلم التنقيط
-1	أ)	p و q أوليان فيما بينهما.	0.5
	ب)	استنتاج: $p^{q-1} \equiv 1\ [q]$	0.25
	ج)	تحقق.....	0.25
		استنتاج.....	0.25
-2	أ)	البرهنة على: $p \equiv 1\ [q]$	0.75
	ب)	استنتاج: $S \equiv 1\ [q]$	0.25
-3		البرهنة على: $q \equiv 1\ [p]$	0.75