

Etude de fonctions

I) Limite d'une fonction (Rappel)

Limite d'une fonction polynôme

- Si f est une fonction **polynôme** alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est celle de son terme de plus haut degré

Limite d'une fonction rationnelle

- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré.

▪ Soit f une fonction rationnelle tel que : $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

▪ Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$ forme indéterminée. C'est à dire a est une racine de $p(x)$ et $q(x)$

donc
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)p_1(x)}{(x-a)q_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$$

Limite d'une fonction irrationnelle

- Si $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = a$, avec ($a \geq 0$) alors $\lim_{x \rightarrow ?} \sqrt{f(x)} = \sqrt{a}$.
- Si $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow ?} \sqrt{f(x)} = +\infty$

Limites usuelles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ si n est impair
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Limites trigonométriques

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Formes indéterminées

$$+\infty + (-\infty) \quad \text{et} \quad 0 \times \infty$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Operations sur les limites

Dans ce paragraphe, a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, L et M sont deux nombres réels.

Limite de la somme de deux fonctions.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	M	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$L + M$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. I

Limite du produit de deux fonctions.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	$L \neq 0$	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	M	∞	∞	∞
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$	$L \times M$	∞	∞	F. I

Le signe se détermine en respectant la règle des signes

Limite du quotient de deux fonctions.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	$L \neq 0$	∞	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$M \neq 0$	0	M	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{L}{M}$	∞	∞	F. I	F. I

Limites et ordre.

Dans ce paragraphe, a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème 1: Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .

- Si $(\forall x \in I); f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- Si $(\forall x \in I); f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

THÉORÈME DES GENDARMES : Soient f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I . et k un réel.

Si $(\forall x \in I); g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = k$ Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$

Lemme :

Si $(\forall x \in I); |f(x) - k| \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1: Calculer les limites

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + 3x^2 - x^3$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x + 5$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x + 1)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5}{x - x^2 + 9}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5}{x^2 - 6x + 9}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{x^2 - 3x}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{4x^2 + 1}}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 4x + 3}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x + 5} - 3}{x - 1}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 3} - 2x$
- 13) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3} + 2x$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$
- 15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 3} - x$
- 16) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3} + x$
- 17) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x - 3)}{x - \sqrt{x + 1} - 1}$
- 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x - 1} - 3x$
- 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$
- 20) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} + x - 5}{x - 2}$
- 21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- 22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
- 23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x}$
- 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos^2 x}{x^2 + 2}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0 ; 3[$ par: $f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 3x}$

- 1) Etudier le signe de f sur l'intervalle I .
- 2) Calculer les limites de f aux bornes de I .

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 9}$

- 1) Etudier le signe de $x^2 - 6x + 9$.
- 2) Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
- 3) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$

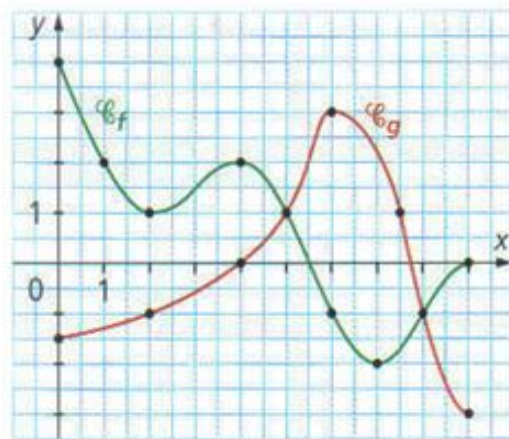
Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

- 1) Montrer que, $(\forall x > 0)$; $\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$.
- 2) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice 5 :

Soient (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g .



- 1) Conjecturez
 - a) (D_f) et (D_g)
 - b) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$
 - c) $f([0; 2])$ et $g([0; 9])$
 - d) Le signe de $f(x)$.
 - e) Le signe de $g'(x)$.
 - f) Le tableau de variation de f .
- 2) Quelles sont les solutions des équations:

$$f(x) = g(x) ; f(x) = 0 ; f(x) = -1 \text{ et } g(x) = 1$$
- 3) Soit m un réel donné, donnez le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
- 4) Résoudre graphiquement l'inéquation: $f(x) \leq g(x)$.
- 5) Supposons que $D_f = [-9; 9]$ et f est une fonction paire.
 - a) Donnez la valeur de: $f(-4)$ et $f(-7)$
 - b) Complétez la construction de la courbes (C_f) .
- 6) Construire la courbe de la fonction $|f|$ sur l'intervalle $[0; 9]$.

Le succès est la somme de petits efforts, répétés jour après jour.

Leo Robert Collier

II) Continuité d'une fonction.

1) Continuité en un point- continuité à droite - continuité à gauche

Définition1: Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Attention: Une fonction ne peut pas être continue en un point qui n'appartient pas au domaine de définition, cela n'a aucun sens.

Définition2: Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; a + \alpha[$ avec $\alpha > 0$.

On dit que f est continue à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

Propriété1: Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Théorème: Si f est dérivable en un point a , alors f est continue en a .

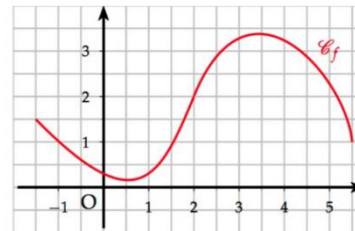
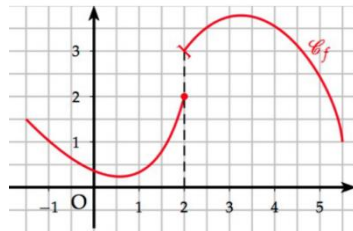
Attention : La réciproque est fautive.

2) Continuité sur un intervalle

Définition : On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle ouvert si elle continue en tout point de l'intervalle.

Remarque : Dire que f est continue sur I signifie que l'on peut tracer sa courbe sans lever le crayon.

La fonction f est
discontinue en 2 car
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \neq f(2)$



La fonction f est
continue en 2 car
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 = f(2)$

Propriétés : - Toute fonction polynôme est continue sur \mathbb{R} .

- Toute fonction rationnelle est continue sur les intervalles où elle est définie.

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

- Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont continues sur \mathbb{R} .

- La fonction *tangente* est continue sur ses intervalles de définition.

- Toutes les fonctions construites par **somme**, **produit**, **quotient** ou par **composition** des fonctions précédentes sont continues sur leur domaine de définition.

Théorème: Si f est dérivable sur I , alors f est continue sur I .

Attention : La réciproque est fautive.

Exemple : la fonction $x \mapsto |x|$ est continue, mais n'est pas dérivable en zéro.

3) Image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue.

Propriétés : L'image d'un intervalle I par une fonction continue f est un intervalle $f(I)$.

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Remarques : $f([a; b]) = [m; M]$ tels que m est le minima et M est le maxima de f sur le segment $[a; b]$.

- Si l'intervalle I n'est pas fermé, alors son image est un intervalle qui peut être fermé, ouvert ou semi-ouvert.

Cas particulier :

L'image d'un intervalle I par une fonction f continue et monotone est un intervalle $J=f(I)$.

	$f(I)$ est l'intervalle:	
Si $I = \dots$	f est croissante sur I	f est décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$]a;b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$]-\infty;b]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b) [$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$
$]a;+\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$

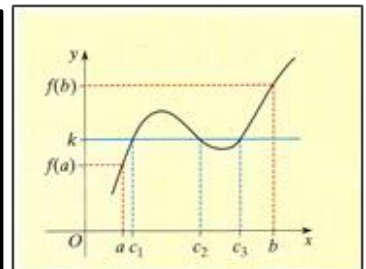
4) Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c) = k$

Autrement dit : l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a;b]$.

Interprétation graphique:

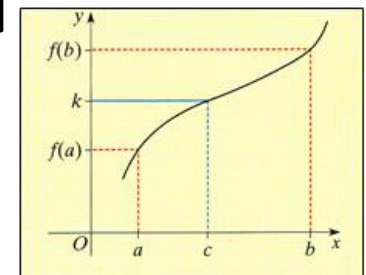
La droite $(D): y=k$ coupe la courbe de f en au moins un point dont l'abscisse est comprise entre a et b .



Corollaire 1 : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $]a;b[$.

Interprétation :

La droite $(D): y=k$ coupe la courbe de f en un seul point dont l'abscisse est comprise entre a et b .



Corollaire 2 : Si f est une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ et $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]a;b[$.

Interprétation : la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses en un seul point dont l'abscisse est comprise entre a et b .

Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie

5) Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

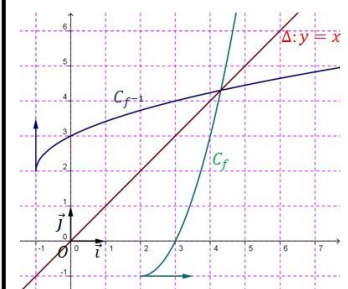
Soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $J=f(I)$.

La fonction réciproque de la fonction f est la fonction notée f^{-1} définie sur J à valeurs dans I , telle que :

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \quad \text{avec } x \in J \text{ et } y \in I.$$

Corollaires : Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors :

- f admet une fonction réciproque notée f^{-1} définie sur $J=f(I)$ à valeurs dans I
- $(\forall x \in I); f^{-1}(f(x)) = x$ et $(\forall y \in J); f(f^{-1}(y)) = y$.
- La fonction f^{-1} est continue et strictement monotone sur $J=f(I)$.
(de même sens de monotonie que k).
- Dans un repère orthonormé, $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à la première bissectrice. (la droite d'équation $y = x$).



Théorème (important): Si f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $k \in f(I)$ Alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I .

III) Dérivabilité d'une fonction.

1) Dérivabilité d'une fonction en un point.

Définition1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I . et a un élément de I .

On dit que f est dérivable en a , s'il existe un nombre

réel ℓ tel que: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$

Le nombre ℓ s'appelle alors le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.

Définition2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; b[$ avec $b > a$.

On dit que f est dérivable à droite en a , s'il existe un

nombre réel ℓ tel que: $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.

Le nombre ℓ s'appelle alors le nombre dérivé à droite en a , et on le note $f'_d(a)$.

Propriété : f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a , f est dérivable à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Interprétation géométrique du nombre dérivé.

- 1) Si f est dérivable en a alors (C_f) admet une tangente en $A(a; f(a))$ d'équation: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
- 2) Si f est dérivable en a alors $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ est la fonction affine tangente à f au point a .
- 3) Si f est dérivable à droite en a alors (C_f) admet une demi-tangente en $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_d(a)$.
- 4) Si f est dérivable à gauche en a alors (C_f) admet une demi-tangente en $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_g(a)$.
- 5) Si f est dérivable à droite en a et à gauche en a et $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ alors $A(a; f(a))$ est un **point anguleux**.
- 6) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en a , Cependant, la courbe admet au point d'abscisse a une demi-tangente verticale.

2) Dérivabilité sur un intervalle - Fonction dérivée d'une fonction.

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I . Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f' .
- On dit que f est dérivable sur $[a; b]$ si elle est dérivable sur $]a; b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b .

Propriétés : Toute fonction **polynôme** est dérivable sur \mathbb{R} .

- Toute fonction **rationnelle** est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- Les deux fonctions **sin** et **cos** sont dérivables sur \mathbb{R} .
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Théorème (Dérivation d'une fonction composée) :

Si u est une fonction définie et dérivable sur I et v une fonction définie et dérivable sur J tel que $u(I) \subset J$, alors $v \circ u$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \in I); (v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$

Théorème (Dérivation d'une fonction réciproque) :

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I et $a \in I$.

- Si f est dérivable sur I et $(\forall x \in I); f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et on a :

$$(\forall x \in J); (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{et si} \quad f'(a) \neq 0 \quad \text{alors} \quad (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

- Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et k un réel alors :

Opérations sur les fonctions dérivées		Dérivées des fonctions usuelles	
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	k	0
$\lambda \cdot u(x)$	$\lambda \cdot u'(x)$	ax	a
$u(x) \times v(x)$	$u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$	ax^n	$n \cdot ax^{n-1}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{u(x)}$	$\frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$u \circ v(x)$	$u'(v(x)) \times v'(x)$	$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt[n]{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{n \sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}$	$\cos x$	$-\sin x$
$(u(x))^n$	$n \cdot (u(x))^{n-1} \times u'(x)$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

3) Applications de la fonction dérivée.

- **Dérivée et variations.** Théorèmes admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $(\forall x \in I); f'(x) \geq 0$, alors la fonction f est **croissante** sur I .
- Si $(\forall x \in I); f'(x) \leq 0$, alors la fonction f est **décroissante** sur I .
- Si $(\forall x \in I); f'(x) > 0$, alors la fonction f est **strictement croissante** sur I .
- Si $(\forall x \in I); f'(x) < 0$, alors la fonction f est **strictement décroissante** sur I .
- Si $(\forall x \in I); f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I .

Remarque :

Si $(\forall x \in I); f'(x) \geq 0$ et f' s'annule en des points isolés alors la fonction f est **strictement croissante** sur I .

- **Extremums d'une fonction.**

Propriété : f est dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local de la fonction f sur I .

Remarque : Si $f'(a) = 0$ et f' ne change pas de signe, alors $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion**.

- **Concavité et dérivée seconde**

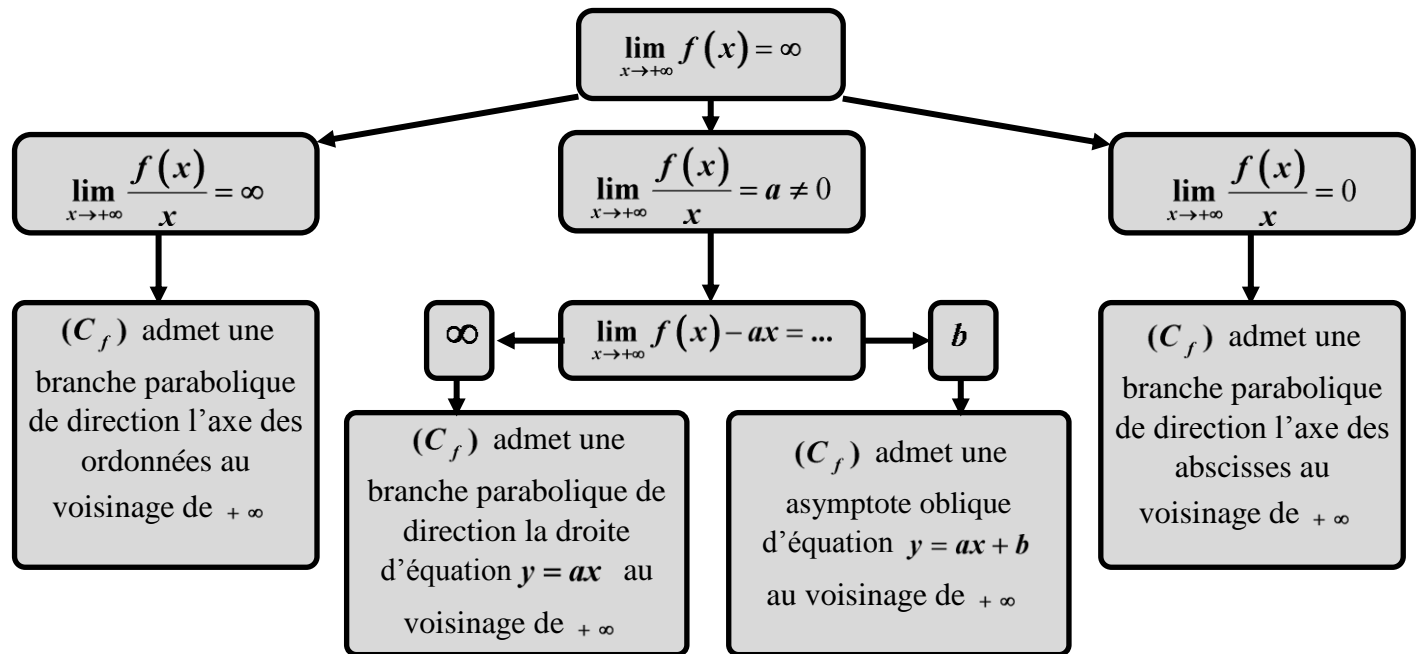
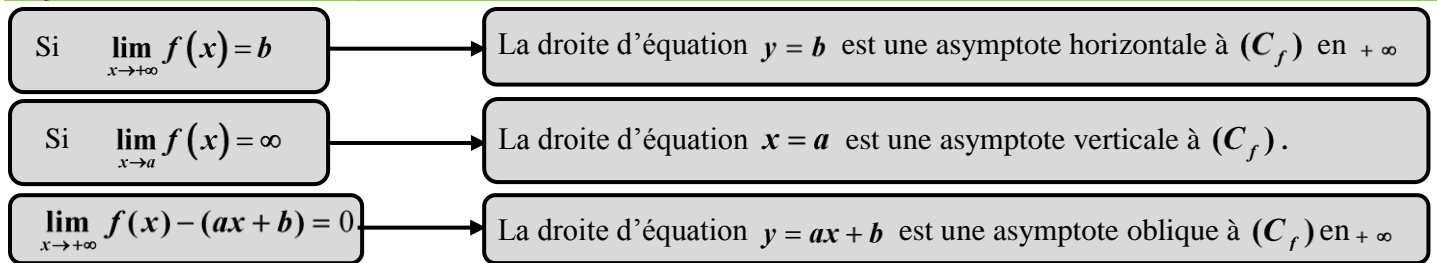
Définition : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I . et (C_f) sa courbe représentative.

- On dit que la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives (**convexe**), s'elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives (**concave**), s'elle est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.

Propriété : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Si $(\forall x \in I); f''(x) \geq 0$, alors la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives.
- Si $(\forall x \in I); f''(x) \leq 0$, alors la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives.
- Si $f''(a) = 0$ et f'' change de signe, alors $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion**.

IV) Les branches infinies



V) Axe de symétrie - Centre de symétrie

Soit f une fonction définie sur un ensemble D .

On dit que la droite $(\Delta) : x = a$ est un axe de symétrie de f si pour tout x de D on a :
 $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$

On dit que le point $I(a; b)$ est un centre de symétrie de f si pour tout x de D on a :
 $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$

VI) Fonction paire - Fonction impaire

On dit que f est une fonction paire : Si pour tout x de D_f on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
Remarque : La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On dit que f est une fonction impaire : Si pour tout x de D_f on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$
Remarque : La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

VII) Fonction périodique

On dit que f est une fonction périodique s'il existe un réel positif T tel que : pour tout x de D_f on a :
 $(x + T) \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$ (T est appelé une période de la fonction f)

VIII) Position relative d'une courbe et d'une droite

Pour étudier la position relative d'une courbe (C_f) et d'une droite $(\Delta) : y = ax + b$ sur un intervalle I , on doit étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$ sur I .

- si $(\forall x \in I); f(x) - (ax + b) > 0$, alors (C_f) est strictement au-dessus de (Δ) sur I .
- si $(\forall x \in I); f(x) - (ax + b) < 0$, alors (C_f) est strictement au-dessous de (Δ) sur I .
- Les solutions de l'équation $f(x) - (ax + b) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (Δ) .

IX) Fonction racine $n^{\text{ième}}$

Définition : a désignant un réel positif et n un entier naturel non nul.

On appelle racine $n^{\text{ième}}$ de a le réel positif noté $\sqrt[n]{a}$ tel que $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.

Propriétés : Pour tous réels x et y positifs et pour tous entiers naturels m et n on a :

- $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la fonction **réciproque** de la fonction $x \mapsto x^n$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$
- $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$
- $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$
- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
- $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$ / $y \neq 0$

Remarque. Les règles de calculs sur les **racines $n^{\text{ième}}$** sont les mêmes que celles sur les racines carrées.

X) Puissance d'exposant rationnel d'un réel strictement positif.

Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel tel que : $r = \frac{p}{q}$ avec $(p; q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

On remarque que : $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^{\frac{p}{q} \times q} = x^p$ et $\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^q = x^p$ donc $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$.

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs et pour tous nombres rationnels m et n on a :

- $x^m \times x^n = (xy)^n$
- $x^m \times x^n = x^{m+n}$
- $(x^m)^n = x^{mn}$
- $\frac{x^m}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$
- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

Remarque. Les règles de calculs sur les exposants rationnels sont les mêmes que celles sur les exposants entiers.