

Dérivabilité d'une fonction en un point :

On dit que la fonction f est dérivable en x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l = f'(x_0)$, avec $l \in \mathbb{R}$.

Le nombre réel $f'(x_0)$ s'appelle nombre dérivé de la fonction f au point x_0 .

Interprétation géométrique :

Soit f une fonction dérivable en x_0 donc la courbe (\mathcal{C}_f) admet une tangente (Δ) au point $A(x_0, f(x_0))$ d'équation : $(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche :

⊗ On dit que la fonction f est dérivable à droite en x_0 si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l' = f'_d(x_0) \quad , \quad \text{avec } l' \in \mathbb{R} .$$

⊗ On dit que la fonction f est dérivable à gauche en x_0 si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l'' = f'_g(x_0) \quad , \quad \text{avec } l'' \in \mathbb{R} .$$

★ Si : $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ donc la fonction f est dérivable en x_0 .

⊗ **Interprétation géométrique :** La courbe (\mathcal{C}_f) admet une tangente (Δ) au point

$A(x_0; f(x_0))$ d'équation : $(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

★ Si : $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ donc la fonction f n'est pas dérivable en x_0 .

⊗ **Interprétation géométrique :** La courbe (\mathcal{C}_f) admet au point $A(x_0; f(x_0))$ deux demi-tangente (T_1) à droite et (T_2) à gauche d'équations :

$(T_1): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ et $(T_2): y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

★ Si : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ donc la fonction f n'est pas dérivable en x_0 .

⊗ **Interprétation géométrique :** La courbe (\mathcal{C}_f) admet au point $A(x_0; f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers les ordonnées positives.

★ Si : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ donc la fonction f n'est pas dérivable en x_0 .

⊗ **Interprétation géométrique :** La courbe (\mathcal{C}_f) admet au point $A(x_0; f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers les ordonnées négatives.

Opérations sur les fonctions dérivables :

★ Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et α un nombre réel.

Alors : $(f \pm g)' = f' \pm g'$; $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$; $(\alpha f)' = \alpha f'$

et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : (f^n)' = n \times f' \times f^{n-1}$.

★ Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $(\forall x \in I) : g(x) \neq 0$.

$$\text{Alors : } \left(\frac{a}{g}\right)' = -\frac{a \times g'}{g^2} ; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2} .$$

★ Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $(\forall x \in I): f(x) > 0$.

$$\text{Alors : } (\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}} ; \left(\sqrt[n]{f}\right)' = \frac{f'}{n(\sqrt[n]{f})^{n-1}} .$$

★ Soient f et g deux fonctions dérivables respectivement sur deux intervalles I et J , tel que $f(I) \subset J$. Alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur I , et on a :

$$(\forall x \in I): (g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x) .$$

★ Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , tel que $(\forall x \in I): f'(x) \neq 0$, alors la

fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I) = J$. De plus, on a pour tout $x \in J: (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$.

↳ Dérivabilité et variations d'une fonction :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- ★ Si $(\forall x \in I): f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .
- ★ Si $(\forall x \in I): f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
- ★ Si $(\forall x \in I): f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .

↳ Dérivabilité et extremums d'une fonction :

★ On dit que $f(x_0)$ est un extremum local de f sur un intervalle I , si $f(x_0)$ est un minimum ou maximum local de f en x_0 un intervalle I .

★ f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 est un réel de I .

si $f(x_0)$ est un extremum local de f en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Donc la courbe (\mathcal{C}_f) admet au point $A(x_0; f(x_0))$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

↳ Concavité et point d'inflexion :

Soit f une fonction numérique, à variable réel deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I .

- ★ Si $(\forall x \in I): f''(x) \geq 0$, alors la courbe (\mathcal{C}_f) tourne sa concavité vers les ordonnées positives.
- ★ Si $(\forall x \in I): f''(x) \leq 0$, alors la courbe (\mathcal{C}_f) tourne sa concavité vers les ordonnées négatives.
- ★ Si $(\exists x_0 \in I): f''(x_0) = 0$ en changeant de signe, alors le point $A(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (\mathcal{C}_f) .

↳ Éléments de symétrie d'une courbe :

★ Le point $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie de la courbe (\mathcal{C}_f) si et seulement si :

$$\clubsuit (\forall x \in D_f) : (2a - x) \in D_f .$$

$$\clubsuit f(2a - x) + f(x) = 2b .$$

★ La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (\mathcal{C}_f) si et seulement si :

$$\clubsuit (\forall x \in D_f) : (2a - x) \in D_f .$$

$$\clubsuit f(2a - x) = f(x) .$$