

### Définition:

L'ensemble des nombres complexes s'écrit :  $\mathbb{C} = \{z = a + ib / (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$

### L'écriture algébrique d'un nombre complexe:

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe avec :  $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

- $a + ib$  est l'écriture algébrique du nombre complexe  $z$
- Le nombre  $a$  est la partie réelle de  $z$ , notée :  $\text{Re}(z)$
- Le nombre  $b$  est la partie imaginaire de  $z$ , notée :  $\text{Im}(z)$

### Cas particulier:

- Si  $\text{Im}(z) = 0$ , alors  $z$  est un nombre réel
- Si  $\text{Re}(z) = 0$ , alors  $z$  est un nombre imaginaire pur

### Egalité de deux nombres complexes:

Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes

$$z = z' \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ et } \text{Im}(z) = \text{Im}(z')$$

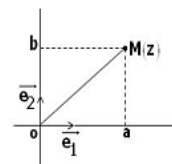
### Représentation graphique d'un nombre complexe:

**Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$**

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe avec :  $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

On relie le nombre complexe  $z$  avec le point  $M(a;b)$

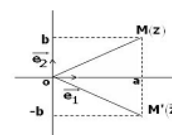
Le nombre  $z$  s'appelle l'affixe du point  $M$  et le point  $M$  s'appelle l'image du nombre  $z$  et on écrit :  $M(z)$



### Conjugué d'un nombre complexe:

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe avec :  $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

Le conjugué du nombre complexe  $z$  est le complexe noté  $\bar{z}$  avec  $\bar{z} = a - ib$



$M(\bar{z})$  و  $M(z)$  متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $z^n = \bar{z}^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0)$

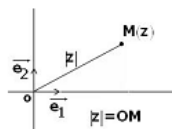
- $\bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow$
- $\bar{-z} = -z \Leftrightarrow$
- $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$
- $z \times \bar{z} = [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2$

### Module d'un nombre complexe:

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe avec :  $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

Le module du nombre complexe  $z$  est le nombre réel positif

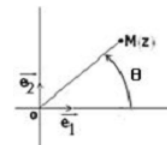
$$|z| \text{ avec } : |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$ z^n  =  z ^n ; n \in \mathbb{N}^*$	$ -z  =  z $	$ z \times z'  =  z  \times  z' $
$ \bar{z}  =  z $	$\left \frac{1}{z'}\right  = \frac{1}{ z' } \quad (z' \neq 0)$	$\left \frac{z}{z'}\right  = \frac{ z }{ z' } \quad (z' \neq 0)$

### L'argument d'un nombre complexe non nul:

Soit  $z$  un nombre complexe non nul et  $M$  son image  
L'argument du nombre complexe  $z$  est  $\theta$  l'un des  
mesures de l'angle orienté  $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM})$



On le note:  $\arg(z)$  et on écrit:  $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

### La forme trigonométrique et la notation exponentielle d'un nombre complexe non nul:

Soit  $z$  un nombre complexe non nul

On pose :  $r = |z|$  et  $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

- La forme trigonométrique du complexe  $z$  est :  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = [r, \theta]$
- La notation exponentielle du complexe  $z$  est :  $z = re^{i\theta}$

### Cas particulier:

L'écriture trigonométrique (réduite) d'un nombre réel  $a$  non nul

$a > 0$	$a < 0$
$a = [a, 0]$	$a = [-a, \pi]$
$ai = \left[ a, +\frac{\pi}{2} \right]$	$ai = \left[ -a, -\frac{\pi}{2} \right]$

$\arg(zz') = (\arg(z) + \arg(z'))[2\pi]$	$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [r \times r', \theta + \theta']$	$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = (r \times r')e^{i(\theta+\theta')}$
$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)[2\pi]$	$\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$	$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
$-\arg(z) = (\pi + \arg(z))[2\pi]$	$-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$	$-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
$\arg(z^n) = n \arg(z)[2\pi]$	$[r, \theta]^n = [r^n, n \times \theta]$	$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$
$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$	$\frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$	$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = (\arg(z) - \arg(z'))[2\pi]$	$\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$	$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

•  $\forall k \in \mathbb{Z} ; [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$

•  $\arg(z) = k\pi \Leftrightarrow z$  est un réel ( $k \in \mathbb{Z}$ )

•  $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow z$  est un imaginaire pur ( $k \in \mathbb{Z}$ )

### Formule de MOIVRE:

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

### Formules d'EULER:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

### Résolution de l'équation $z^2 = a$ ( $z \in \mathbb{C}$ ) avec ( $a \in \mathbb{R}$ ):

L'équation	Ensembles de solutions
$z \in \mathbb{C} ; z^2 = a$	$a > 0$ $S = \{-i\sqrt{a}; i\sqrt{a}\}$
	$a = 0$ $S = \{0\}$
	$a < 0$ $S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$

**Résolution de l'équation**  $z \in \mathbb{C} ; az^2 + bz + c = 0$  **avec**  $a$  **et**  $b$  **et**  $c$  **des réels et**  $a \neq 0$  :

L'équation		Ensembles de solutions
$z \in \mathbb{C} ; az^2 + bz + c = 0$ ( $\Delta = b^2 - 4ac$ )	$\Delta > 0$	$S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
	$\Delta = 0$	$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$
	$\Delta < 0$	$S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} ; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$

**Notions géométriques:**

La notion géométrique	La relation complexe
La distance $AB$	$AB =  z_B - z_A $
$I$ centre du segment $[AB]$	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
Mesure de l'angle $(\widehat{AB;AC})$	$(\widehat{AB;AC}) \equiv \arg \left( \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$
$A$ et $B$ et $C$ des points alignés	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
$A$ et $B$ et $C$ et $D$ des points cocycliques	$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}$ ou $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

La relation complexe	La notion géométrique
$ z - z_A  = r ; (r > 0)$	$AM = r$ $M$ appartient au cercle de centre $A$ et de rayon $r$
$ z - z_A  =  z - z_B $	$AM = AB$ $M$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[ r ; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	$ABC$ est un triangle rectangle au point $A$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$	$ABC$ est un triangle isocèle au point $A$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[ 1 ; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	$ABC$ est un triangle rectangle et isocèle au point $A$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[ 1 ; \pm \frac{\pi}{3} \right]$	$ABC$ est un triangle équilatéral

**La représentation complexe de quelques transformations usuelles:**

La transformation	La représentation complexe
La translation : $t_{\vec{u}}$	$z' = z + b$ , avec $b$ est l'affixe du vecteur $\vec{u}$
L'homothétie : $h(\Omega; k)$	$z' - \omega = k(z - \omega)$ , avec $\omega$ l'affixe du point $\Omega$
La rotation : $R(\Omega; \theta)$	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ , avec $\omega$ l'affixe du point $\Omega$