

Primitives d'une fonction

1) Définition.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On appelle fonction **primitive**, ou primitive de f sur I , toute fonction F définie et **dérivable** sur I telle que :

$$(\forall x \in I) ; F'(x) = f(x)$$

2) Propriétés.

Propriété1 : Toute fonction **continue** (dérivable) sur un intervalle I admet une primitive sur I .

Propriété2: Soit F une primitive de f sur un intervalle I .

- L'ensemble des primitives de f sur l'intervalle I est l'ensemble des fonctions définies sur I par : $x \mapsto F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- En particulier, si $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, alors il existe une unique primitive de f sur I telle que : $f(a) = b$.

Propriété3: Soit F une primitive de f sur un intervalle I alors G est une autre primitive de f sur l'intervalle I si et seulement si : $G(x) = F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

3) Propriétés de calculs sur les primitives.

Primitives des fonctions usuelles	
$f(x)$	$F(x)$
k	$k \cdot x + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x^r / (r \in \mathbb{Q} - \{0; -1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$

- Soient u et v deux fonctions dérivables sur I .
- U et V des primitives de u et v sur I

$f(x)$	$F(x)$
$u(x) + v(x)$	$U(x) + V(x) + c$
$\lambda \cdot u(x)$	$\lambda \cdot U(x) + c$
$u' \times u$	$\frac{1}{2} u^2 + c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt[n]{u(x)}}$	$n \cdot \sqrt[n]{u(x)} + c$
$u' \times u^r / (r \in \mathbb{Q} - \{0; -1\})$	$\frac{u^{r+1}}{r+1} + c$

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1:

Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I .

1) $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ sur $I = \mathbb{R}$.

2) $f : x \mapsto \frac{3}{x^2}$ sur $I = [1 ; +\infty[$.

3) $f : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}}$ sur $I = [1 ; +\infty[$.

4) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $I =]0 ; +\infty[$.

5) $g : x \mapsto 3x^2 \times (x^3 - 1)^2$ sur $I = \mathbb{R}$.

6) $h : x \mapsto \frac{2x}{(x^2 - 3)^3}$ sur $I = [4 ; +\infty[$.

7) $g : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ sur $I = \mathbb{R}$.

8) $f : x \mapsto \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ sur $I = \mathbb{R}$.

9) $f : x \mapsto \tan^2(x)$ sur $I = \mathbb{R}$.

10) $f : x \mapsto x^2(2x - 1)$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice2:

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 7}{(x-2)^2}$ définie sur $I = [3, +\infty[$.

1) Déterminer a, b et c de façon que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$$

2) Calculer les primitives de f sur $I = [3, +\infty[$.

3) En déduire la primitive F de f sachant que

$$F(3) = \frac{11}{2}$$

Exercice3:

1) Déterminer les primitive de $x \mapsto \frac{1}{1 + \cos 2x}$ sur

l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$.

2) Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto x^3(x^4 - 1)$ tel que $F(0) = -1$.

3) Déterminer a, b et c de façon que :

$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$ soit une primitive de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{3-2x}$.

Every one thinks of changing the world , but no one thinks of changing himself.