

Dans ce chapitre du cours, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Formule analytique du : produit scalaire-norme d'un vecteur-produit vectoriel:

Soit $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ deux vecteurs de \mathcal{G}^3 (l'espace vectoriel)

$$\vec{u}\vec{v} = aa' + bb' + cc' \quad (\text{Produit scalaire})$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (\text{norme d'un vecteur})$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \\ \vec{k} & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \vec{k} \quad (\text{Produit vectoriel})$$

La distance:

La distance entre deux points A et B est égale à :

$$AB = \|\overline{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

La distance entre un point M et un plan (P) d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(M; (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

La distance entre un point M et une droite $\Delta(A; \vec{u})$ est : $d(M; (\Delta)) = \frac{\|\overline{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Equation d'un plan:

$(P): ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow \vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal au plan (P)

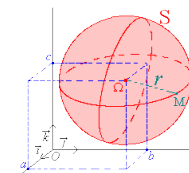
Si A, B et C sont trois points non alignés, alors $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) , et dans ce cas on peut déduire l'équation cartésienne du plan (ABC) à l'aide de l'équivalence suivante :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = 0$$

Equation d'une sphère:

L'équation d'une sphère (S) de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon r

$$\text{est : } (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

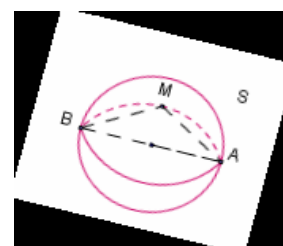


L'équation d'une sphère (S) dont l'un de ces diamètres est $[AB]$ peut se déterminer à l'aide de l'équivalence suivante :

$$M \in (S) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$$

Remarque: dans ce cas la sphère (S) est de centre Ω milieu du

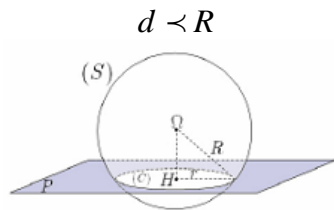
segment $[AB]$ et de rayon $r = \frac{AB}{2}$



Intersection d'une sphère $S(\Omega; R)$ et un plan $(P) : ax + by + cz + d = 0$:

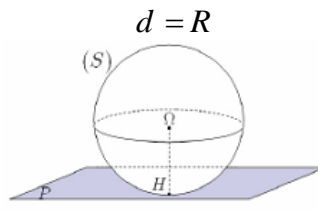
Soit H la projection orthogonale du centre Ω sur le plan (P)

On pose : $d = \Omega H = d(\Omega; (P))$

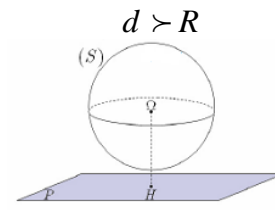


Le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) de centre H et de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$



Le plan (P) est tangent à la sphère (S)

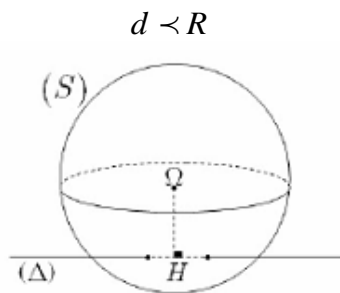


Le plan (P) ne coupe pas la sphère (S)

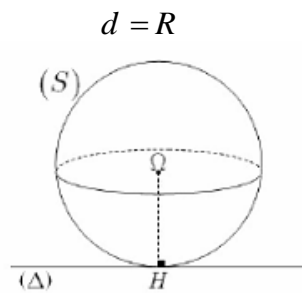
Intersection d'une sphère $S(\Omega; R)$ et une droite (Δ) :

Soit H la projection orthogonale du centre Ω sur la droite (Δ)

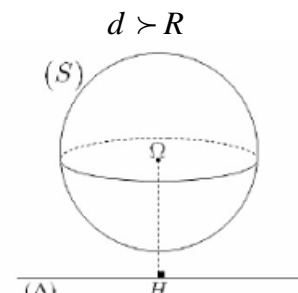
On pose : $d = \Omega H = d(\Omega; (\Delta))$



La droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points différents



La droite (Δ) est tangente à la sphère (S)



La droite (Δ) ne coupe pas la sphère (S)