

# LIMITE ET CONTINUITÉ

## I) CONTINUITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT

### 1) Activité et rappelles

#### 1.1 Activités :

##### Activité 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 3}{1 - \cos^2 x}$$

##### Activité 2 :

Considérons la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} ; \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 14 \end{cases}$$

1- Déterminer  $D_f$

2- a) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

b) Comparer  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  et  $f(1)$

On dit que  $f$  est continue en  $x_0 = 1$

##### Activité 3 :

Considérons la fonction  $g$  définie par :

$$\begin{cases} g(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right) ; \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases} \quad (E \text{ désigne la partie entière})$$

1- Déterminer  $D_f$

2- Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$

3-  $g$  est elle continue en  $x_0 = 0$ ?

#### 1.2 Rappel

##### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $a$  et  $l$  un réel. On dit que la fonction  $f$  tend vers le réel  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  si :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

### 2 Définition et exemples

##### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de centre  $a$ . On dit que la fonction  $f$  est **continue** en  $a$  si :

elle admet une limite finie en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

C'est-à-dire :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

**Exemples :**

- ❶ Montrer en utilisant la définition que  $g(x) = 3x + 1$  est continue en  $a$  ( $a$  un réel quelconque).
- ❷ Montrer en utilisant la définition que  $h(x) = x^2 + 1$  est continue en 1
- ❸ Considérons la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - x - 14}{x^2 - x - 2} & ; \text{si } x > 2 \\ \frac{x - 2}{2x^2 + x - 10} & ; \text{si } x < 2 \\ f(2) = \frac{1}{9} \end{cases}$$

En utilisant la notion des limites étudier la continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 2$

**3- Interprétations graphiques**

**3.1 Activité :**

**Activité 1:**

Considérons la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 1 \\ x^2 - 2x, & x \geq 1 \end{cases}$

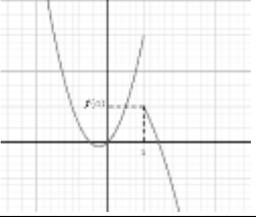
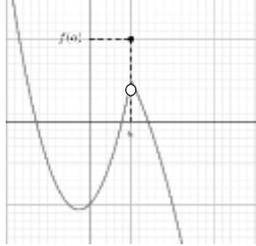
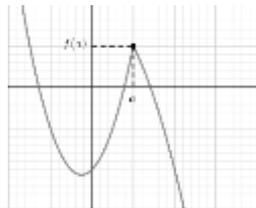
- 1- Déterminer  $f(1)$  et étudier la continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 1$
- 2- Représenter graphiquement la fonction  $f$ .

**Activité 2 :**

Considérons la fonction  $h$  définie par :  $h(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < -1 \\ -3x + 3, & x > -1 \end{cases}$  et  $h(-1) = 3$

- 1- a) la fonction  $h$  admet-elle une limite en  $x_0 = -1$
- b) la fonction  $h$  est-elle continue en  $x_0 = -1$
- 2- Représenter graphiquement la fonction  $h$ .

**3.2 Interprétations**

La courbe	L'interprétation
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f</math> est définie en 1</li> <li>• <math>f</math> n'admet pas de limite en 1</li> <li>• <math>f</math> n'est pas continue en 1</li> </ul>
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 2, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x > 1 \end{cases}; f(1) = 2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f</math> est définie en 1</li> <li>• <math>f</math> admet une limite en 1 et <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)</math></li> <li>• <math>f</math> n'est pas continue en 1</li> </ul>
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 2, & x < 1 \\ -x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f</math> est définie en 1</li> <li>• <math>f</math> admet une limite en 1 et <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)</math></li> <li>• <math>f</math> est continue en <math>a</math></li> </ul>

**Exercice :**

Etudier la continuité de la fonction

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{3}{x}\right), & x \neq 0 \\ f(0) = 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

**4) Prolongement par continuité****Activité :**

Soit la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

- 1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $h$ .
- 2- Déterminer la limite  $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$ ,  $h$  est-elle continue en  $x_0 = -1$  ?
- 3- Soit la fonction  $\bar{h}$  définie par :  $\begin{cases} \bar{h}(x) = h(x) & \text{si } x \neq -1 \\ \bar{h}(-1) = 3 \end{cases}$

- a) Déterminer  $D_{\bar{h}}$
- b) Etudier la continuité de la fonction  $\bar{h}$  en  $x_0 = -1$

La fonction  $\bar{h}$  s'appelle **un prolongement par continuité de la fonction  $h$  en -1**

- 4- Peut-on prolonger  $h$  par continuité en  $a = -2$

**Théorème et définition :**

Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D_f$ ;  $a$  un réel tel que  $a \notin D_f$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  (finie)

La fonction  $\bar{f}$  définie par :  $\begin{cases} \bar{f}(x) = f(x); & \text{si } x \neq a \\ \bar{f}(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \end{cases}$  est une fonction **continue en  $a$**  et c'est **un prolongement de la fonction  $f$  en  $a$** .

La fonction  $\bar{f}$  s'appelle **un prolongement par continuité** de la fonction  $f$  en  $a$

**Exercice 1 :**

Définir un prolongement par continuité de la fonction  $g(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1}$  en  $a = 1$

**Exercice 2 :**

Soit la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \frac{x^2+x-6}{x-E(x)}$  ( $E$  désigne la partie entière)

Peut-on prolonger  $h$  par continuité en  $a = 2$  ?

**II) CONTINUITE A DROITE CONTINUITE A GAUCHE.****1) Activité et définition.****1.1 Activité.****Introduction**

Dans l'exercice précédent où  $f$  était définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{2x^3 - x - 14}{x^2 - x - 2} ; \text{si } x > 2 \\ f(x) = \frac{x - 2}{2x^2 + x - 10} ; \text{si } x < 2 \\ f(2) = \frac{1}{9} \end{array} \right.$$

On a trouvé que :  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{9} = f(2)$  ; on dit que **la fonction  $f$  est continue à gauche** de 2  
 et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \frac{1}{9} = f(2)$  on dit que **la fonction  $f$  n'est pas continue à droite** de 2.

### 1.2 Définitions

#### Définition

❶ Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a + r[$  (où  $r > 0$ )

On dit que la fonction  $f$  est **continue à droite de  $a$**  si :  $f$  admet une limite finie à droite de  $a$  et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

❷ Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a - r, a]$  (où  $r > 0$ )

On dit que la fonction  $f$  est **continue à gauche de  $a$**  si :  $f$  admet une limite finie à gauche de  $a$  et

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq a - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

#### Théorème

Une fonction est continue en un point  $a$  si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de  $a$

**Preuve :** (En exercice)

#### Exercice 1:

Etudier la continuité de la fonction  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{|4x - 3| - 1} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{5}{4} \end{array} \right.$  en  $a = 1$

#### Exercice 2 :

Soit la fonction  $g$  définie par :  $\left\{ \begin{array}{l} g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{2x + 12} - 4} \text{ si } x > 2 \\ g(x) = \frac{x^2 + \alpha x - \alpha + 1}{x - 2} \text{ si } x < 2 \\ g(2) = l \end{array} \right.$

Existent-t-il  $\alpha$  et  $l$  pour que  $g$  soit continue en 2 ?

## III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

### 1) Continuité sur un intervalle

#### Définition :

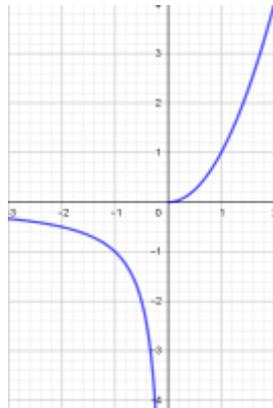
Soit  $f$  une fonction dont le domaine de définition est  $D_f$ , soit  $]a, b[$  un intervalle inclus dans  $D_f$

- On dit que  $f$  est continue sur l'ouvert  $]a, b[$  si elle est continue en tout point de  $]a, b[$
- On dit que  $f$  est continue sur  $[a, b[$  si elle est continue sur  $]a, b[$  et à droite de  $a$
- On dit que  $f$  est continue sur  $]a, b]$  si elle est continue sur  $]a, b[$ , à droite de  $a$  et à gauche de  $b$

**Remarque :**

- ✓ Si une fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et sur  $[b, c]$  elle est continue sur  $[a, c]$
- ✓ En général si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et sur un intervalle  $J$  et si  $I \cap J \neq \emptyset$  alors  $f$  est continue sur  $I \cup J$ .
- ✓  $f$  peut-être continue sur  $[a, b[$  et sur  $]b, c]$  sans qu'elle soit continue sur  $[a, c]$   
 Dans le graphique ci-dessous  $f$  est continue sur  $[-3, 0[$  et continue sur  $]0, 2]$  mais pas continue sur  $[-3, 0]$  car elle n'est pas continue en 0

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**2) Opérations sur les fonctions continues****2.1 Rappelles sur les opérations sur les limites finies****Propriété :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions tels que :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$   $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$  on a :

- $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + l'$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = l \times l'$
- $\lim_{x \rightarrow a} (|f|)(x) = |l|$
- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{l'} \quad l' \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'} \quad l' \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{f})(x) = \sqrt{l} \quad l > 0$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel  $a$ .

**2.2 Opérations sur les fonctions continues**

Grace à la propriété précédente et à la définition de la continuité on peut en déduire :

**Propriété :**

① Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$  alors :

- $f + g$
- $f \times g$
- $|f|$

sont des fonctions continues en  $a$

② Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$  et  $g(a) \neq 0$  alors

- $\frac{1}{g}$
- $\frac{f}{g}$

sont des fonctions continues en  $a$ .

③ Si  $f$  une fonction continue en  $a$  et  $f(a) \geq 0$  alors :

- $\sqrt{f}$  est continue en  $a$

**Remarque :**

La propriété précédente reste vraie soit à droite de  $a$ , à gauche de  $a$  ou sur un intervalle  $I$  (En tenant compte des conditions)

**Résultat :**

Une fonction polynôme sur  $\mathbb{R}$  est définie comme la somme des plusieurs monômes

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Et puisque la fonction  $x \mapsto x^n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc la fonction  $x \mapsto kx^n$  et par suite

**Propriété :**

Tout fonction polynôme est continue sur  $\mathbb{R}$

**Propriété :**

Les fonctions *sin* et *cos* sont continue sur  $\mathbb{R}$

**Exemples :**

❶  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car  $x \mapsto x^2 + x + 3$  étant une fonction polynôme donc elle est continue sur  $\mathbb{R}$  de plus  $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 3 \geq 0)$  (Son discriminant  $\Delta$  est négatif)

❷  $g(x) = \frac{4x^3 + x + 1}{x^2 + 2x - 3}$  est continue sur  $] -\infty, -3[$  ; sur  $] -3, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$ .

❸ La fonction *tan* est continue sur tous le intervalles de la forme :  $]\frac{-\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[$  ( où  $k \in \mathbb{Z}$  )

**2.3 Continuité de la composition de deux fonctions.****Théorème :**

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  tels que  $f(I) \subset J$  et  $x_0$  un élément de  $I$ .

❶ Si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $g$  continue en  $f(x_0)$  alors  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

❷ Si  $f$  est continue  $I$  et  $g$  continue en  $f(I)$  alors  $g \circ f$  est continue  $I$ .

**Preuve :** (En utilisant la définition)

Montrons que :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon$

On a  $g$  est continue en  $f(x_0)$  donc :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \beta > 0)(|t - f(x_0)| < \beta \Rightarrow |g(t) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad (R)$$

et puisque  $f(I) \subset J$  donc :  $(\forall x \in I)(f(x) \in J)$  ( on pose  $t = f(x)$  dans  $(R)$  ) on obtient :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \beta > 0)(|f(x) - f(x_0)| < \beta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad (*)$$

Pour  $\beta > 0$   $(\exists \alpha > 0)(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \beta$  (car  $f$  est continue en  $x_0$ )

$$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad (*) \quad \text{C.Q.F.D}$$

**Exemples :**

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car :

- $x \mapsto x^2 + 1$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  donc
- $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $(\forall x \in \mathbb{R})\left(\frac{1}{x^2+1} \in \mathbb{R}\right)$
- *sin* est continue sur  $\mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{\sin^2 x + 1}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (justifier la réponse)

**Exercice :** Montrer que  $h(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  est continue sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$

### 3) Limite de vou

**Théorème :**

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $x_0$  telle que  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$  ; si  $v$  est continue en  $l$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} (vou)(x) = v(l)$

**Preuve :**

On a :  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l \in \mathbb{R}$  donc  $u$  admet un prolongement par continuité  $\bar{u}$  définie comme :

$$\begin{cases} \bar{u}(x) = u(x) ; \text{ si } x \neq x_0 \\ \bar{u}(x_0) = l \end{cases}$$

La fonction  $\bar{u}$  étant continue en  $x_0$ ; et  $v$  est continue en  $l = \bar{u}(x_0)$  alors et d'après le théorème de la composition  $(v \circ \bar{u})$  est continue en  $x_0$  et par suite :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (vou)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ \bar{u})(x) = (v \circ \bar{u})(x_0) = v(\bar{u}(x_0)) = v(l)$$

**Application :**

Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\pi \frac{\sin 4x}{3x}\right)$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\pi x \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\right)$

## IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

### 1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

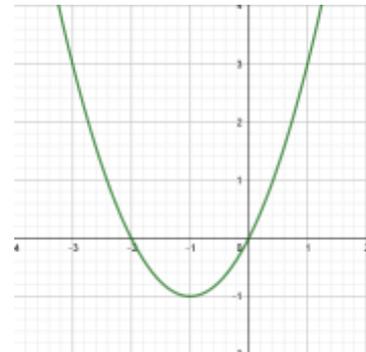
**Activité :**

Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction  $f(x) = x^2 + 2x$

1- Déterminer graphiquement les images des intervalles

$$I_1 = [0, 1], I_2 = [-3, -1]; I_3 = [-3, 1]$$

2- Montrer algébriquement que  $f([-3, 1]) = [-1, 3]$



**Rappelle :**

$$\begin{aligned} f(I) = J &\Leftrightarrow \begin{cases} f(I) \subset J \\ J \subset f(I) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in I)(f(x) \in J) \\ (\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y) \end{cases} \end{aligned}$$

**Théorème :** (Admis)

L'image d'un segment  $[a, b]$  par une fonction continue est le segment  $[m, M]$  où :

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

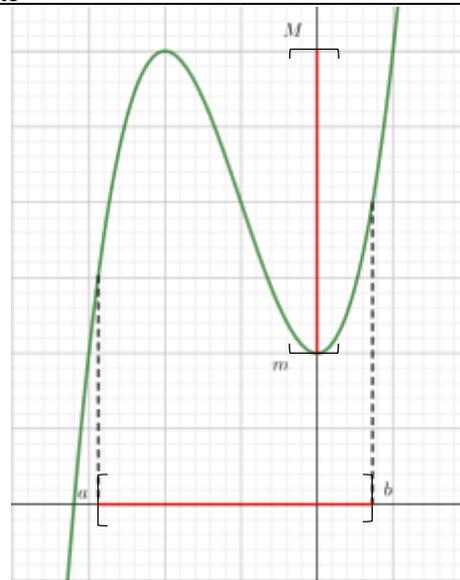
La courbe ci-contre est la courbe de la fonction

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$$

$$f([a, b]) = [m, M]$$



continuitéamgeintervalle.ggb



### Cas particulier :

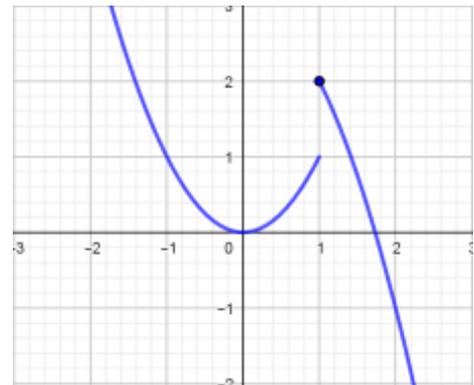
- Si  $f$  est continue croissante sur  $[a, b]$  alors  $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
- Si  $f$  est continue décroissante sur  $[a, b]$  alors  $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$

### Remarque :

La continuité dans le théorème précédent est suffisante mais pas nécessaire

Dans la figure ci-contre  $f$  n'est pas continue mais

$$f([0,2]) = [f(2), f(1)] = [-1,2]$$



## 2) Image d'un intervalle.

### 2.1 Théorème général

#### Théorème (admis)

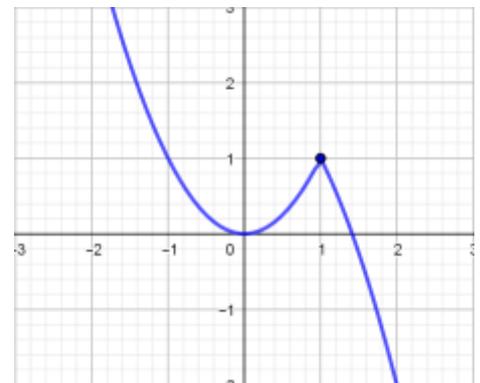
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

### Remarque :

L'intervalle  $I$  et son image  $f(I)$  par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme.

Dans le cas de la courbe ci-contre on a :

$$f([0,2]) = [-2,1]$$



## 2.2 Cas d'une fonction strictement monotone :

L'intervalle $I$	$f(I) : f$ strictement croissante	$f(I) : f$ strictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$[a, +\infty[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)]$
$] -\infty, b[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$
$] -\infty, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$

### Remarque

Si  $f$  n'est pas strictement monotone sur l'intervalle  $I$ , on peut utiliser les propriétés précédentes en subdivisant l'intervalle  $I$  en intervalles où  $f$  est strictement monotone et on utilise la propriété  $f(I_1 \cup I_2) = f(I_1) \cup f(I_2)$ .

### Exercice :

- Dresser le tableau de variation de la fonction  $f(x) = 2x^2 - 3x^2$
- Déterminer les images des intervalles suivants :  $] -1, 0]$  ;  $[1, 2]$  ;  $[-1, 2[$  ;  $[0, +\infty[$

## V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERE – TVI.

### 1) Le théorème :

#### 1.1 Cas général

#### Preuve :

Rappelons que :  $f(I) = J \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in I)(f(x) \in J) \\ (\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y) \end{cases}$

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  ;  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  tels que :  $a < b$ .

On sait que  $f([a, b]) = [m, M]$  où  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$  et  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$

On a donc  $f(a) \in [m, M]$  et  $f(b) \in [m, M]$ .

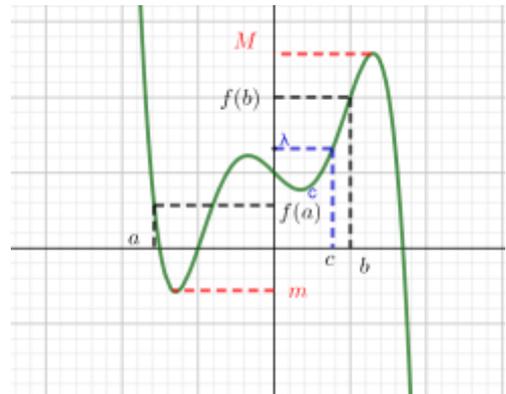
Soit  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  on a donc :  $\lambda \in [m, M]$  et puisque  $f([a, b]) = [m, M]$  donc  $\lambda$  admet au moins un antécédent  $c$  dans l'intervalle  $[a, b]$ .

D'où pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$

#### Théorème T.V.I :

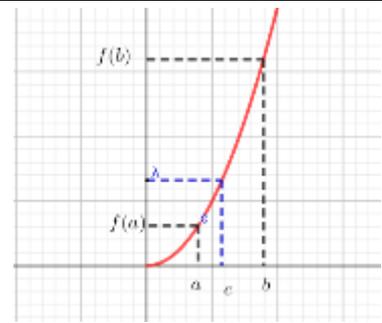
Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  .

Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$



1.2 Cas  $f$  strictement monotone.**Théorème T.V.I (cas  $f$  strictement monotone)**

Soit  $f$  une fonction continue **strictement monotone** sur  $[a, b]$  .  
 Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe **un et un seul**  
 $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$

**Remarque :**

L'expression " Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe un et un seul  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$  " peut-être formulée comme :

" Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  l'équation  $f(x) = \lambda$  admet une solution unique dans  $[a, b]$

**Corolaire1 (T.V.I) :**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  .  
 Si  $f(a) \times f(b) < 0$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$

**Preuve :**

$f(a) \times f(b) < 0$  veut dire que  $f(a)$  et  $f(b)$  ont des signes opposés donc 0 est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$

On prend  $\lambda = 0$  dans le théorème général des valeurs intermédiaire.

**Corolaire2 (T.V.I) :**

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur  $[a, b]$  .  
 Si  $f(a) \times f(b) < 0$  il existe un et un seul  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = 0$

**2) Applications :****Exercice 1 :**

- 1- Montrer que l'équation  $x^3 + x - 1 = 0$  admet une racine unique dans  $[0,1]$
- 2- Montrer que l'équation  $x^3 + x - 1 = 0$  admet une racine unique dans  $\mathbb{R}$ .

**VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.****Activité :**

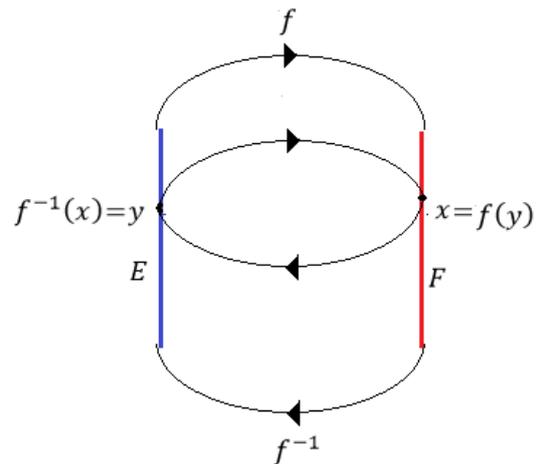
Soit  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- 1- Montrer que pour tout  $y$  dans  $I = [0, +\infty[$ , l'équation  $f(y) = x$  admet une solution unique dans l'intervalle  $J = ]0,1]$
- 2- Etudier la monotonie et la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

On dit que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque de  $J = ]0, 1]$  vers  $I = [0, +\infty[$

**Remarque :**

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in E \end{cases}$$



On a :

$$(\forall x \in F)(f \circ f^{-1}(x) = x)$$

$$(\forall x \in E)(f^{-1} \circ f(x) = x)$$

## 2) Théorème et applications

### 2.1 Le théorème

**Théorème :**

Soit  $f$  une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , On a  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie de  $J = f(I)$  vers  $I$ .

**Preuve :**

Puisque  $f$  est continue et strictement monotone alors l'image de l'intervalle  $I$  l'intervalle  $J = f(I)$

donc  $f$  est surjective par construction car  $(\forall x \in J = f(I))(\exists y \in I)(f(y) = x)$

Montrons que  $f$  est injective de  $I$  vers  $f(I)$

On suppose pour la démonstration que  $f$  est strictement croissante (même démonstration si  $f$  est strictement décroissante)

Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux éléments distincts de  $I$  (On suppose que  $y_1 > y_2$ )

On a donc ( puisque  $f$  est strictement croissante)  $f(y_1) > f(y_2)$  donc  $f(y_1) \neq f(y_2)$  et finalement  $f$  est injective

donc  $f$  est une bijection de  $I$  vers  $f(I)$

D'où  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  et on a :  $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$

### 2.2 Application :

**Exercice 1**

Soit la fonction  $f(x) = 2x^2 + x + 1$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1- Déterminer  $J = f([0,1])$

2- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque de  $J$  vers  $[0,1]$  et déterminer  $f^{-1}(x)$  pour  $x$  dans  $J$

**Exercice 2 :**

Soit la fonction  $g(x) = x - 2\sqrt{x}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1- Montrer que  $g$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$  puis déterminer  $J = g([1, +\infty[)$

2- Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque de  $J$  vers  $[1, +\infty[$  et déterminer  $g^{-1}(x)$  pour  $x$  dans  $J$

**Exercice 3 :**

Soit la fonction  $h(x) = \frac{x}{1-x^2}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Montrer que  $h$  est une bijection de  $] - 1,1[$  vers un intervalle  $J$  qu'il faut déterminer et déterminer  $h^{-1}(x)$  pour  $x$  dans  $J$ .

**2.3 Propriété de la fonction réciproque**

**Propriété 1 :**

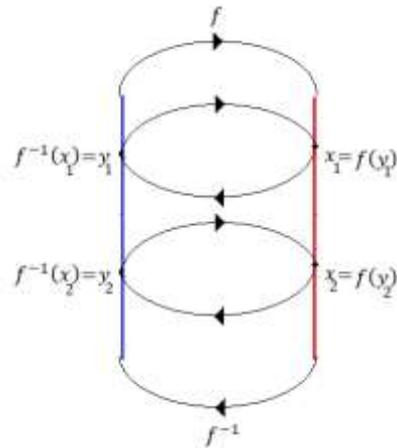
Si  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  alors  $f^{-1}$  à la même monotonie sur  $J$  que celle de  $f$  sur  $I$ .

**Preuve :**

$$\begin{aligned} T_{f^{-1}/J} &= \frac{f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{y_1 - y_2}{f(x_1) - f(x_2)} \\ &= \frac{1}{T_{f/I}} \quad (T_{f/I} \neq 0 \text{ } f \text{ est strictement monotone}) \end{aligned}$$

Donc le taux de  $f^{-1}$  sur  $J$  à le même signe que le taux de  $f$  sur  $I$

Et on conclut.



**Propriété 2 :**

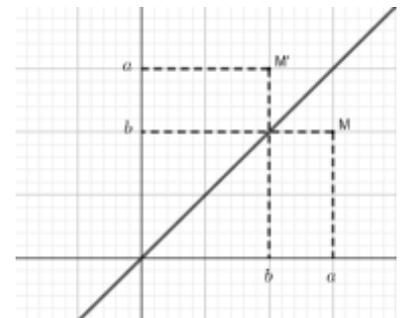
Si  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  alors  $C_{f^{-1}}$  et  $C_f$  sont symétriques par rapport à :

( $\Delta$ )  $y = x$

**Rappelles :**

①  $M(x, y) \in C_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}$

② Dans un repère orthogonal si on a un point  $M(a, b)$  son symétrique par rapport à la droite ( $\Delta$ )  $y = x$  est le point  $M'(b, a)$ .



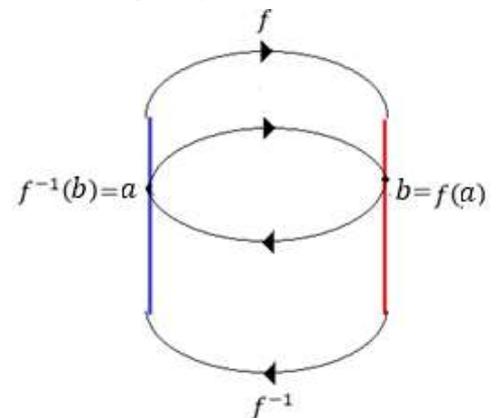
**Preuve d'une propriété :**

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur un intervalle  $I$ ,  $f^{-1}$  sa fonction réciproque définie de  $J = f(I)$  vers  $I$ .

$C_f$  et  $C_{f^{-1}}$  sont les courbes respectives de  $f$  et de  $f^{-1}$ .

Soit  $M(a, f(a))$  un point de la courbe  $C_f$  son symétrique par rapport à la droite ( $\Delta$ )  $y = x$  est le point  $M'(f(a), a)$ .

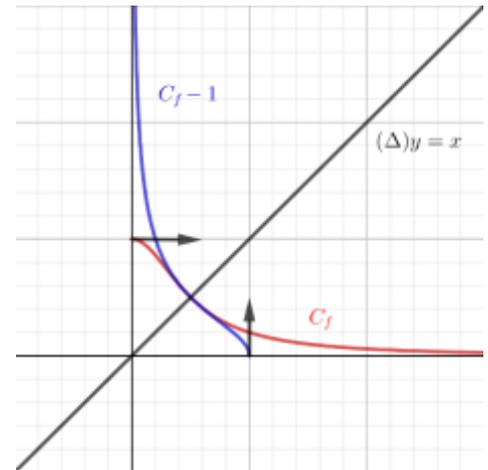
Or :  $\begin{cases} f(a) = b \\ a = f^{-1}(b) \end{cases}$  donc  $M'(b, f^{-1}(b))$  d'où  $M' \in C_{f^{-1}}$



**Propriété :**

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur un intervalle  $I$ ,  $f^{-1}$  sa fonction réciproque définie de  $J = f(I)$  vers  $I$ .  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$  sont symétriques par rapport à la droite ( $\Delta$ )  $y = x$

A remarquer que la symétrie des deux courbes concerne toutes leurs composantes ; les asymptotes ; les tangentes et demi-tangentes...



### 3) La fonction racine $n$ – éme

#### 3.1 Définition et règles de calculs

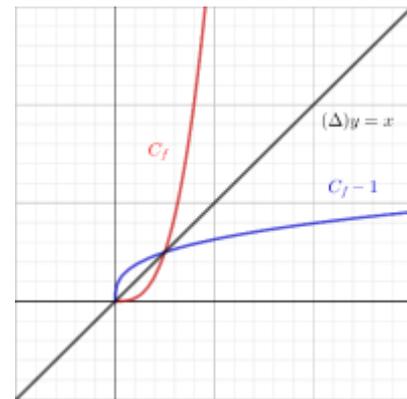
##### Propriété et définition :

Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$  ; la fonction  $u: x \mapsto x^n$  est une fonction continue strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  elle admet donc une fonction réciproque  $u^{-1}$  de  $u(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}^+$ .  
La fonction réciproque  $u^{-1}$  s'appelle la fonction racine  $n$  – éme et se note  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$

##### Conséquence de la définition :

- La fonction  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} \geq 0)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x)$
- La fonction  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  strictement croissante.
  - $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y)$
  - $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n)$
  - $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)((\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall p \in \mathbb{N})(\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- Si  $\lim_{x \rightarrow **} u(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow **} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$
- Si  $\lim_{x \rightarrow **} u(x) = l \geq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow **} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

##### La courbe de la fonction $\sqrt[n]{\phantom{x}}$



##### Règle de calcul :

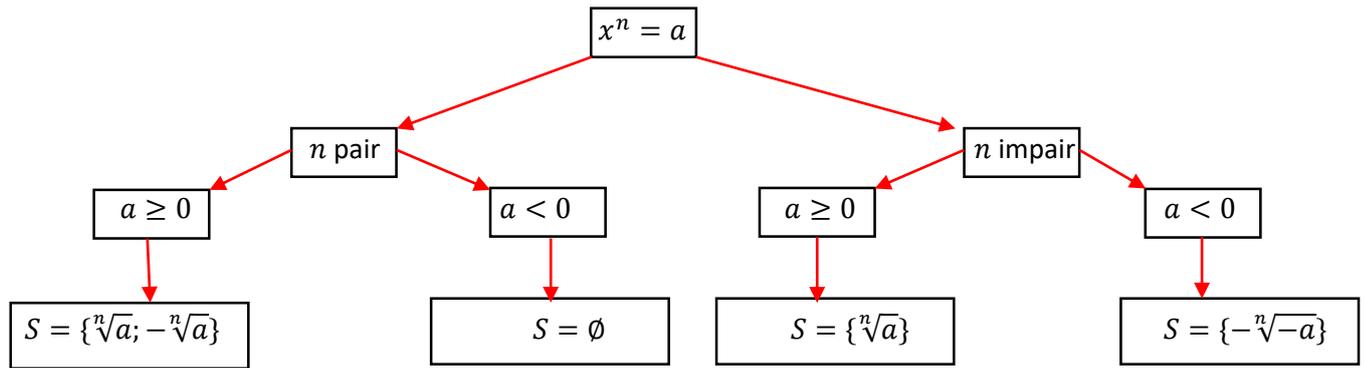
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y})$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})\left(\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*)\left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x}\right)$  (à prouver)
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*)(\sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p})$  (à prouver)

##### Remarque :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[2]{x} = \sqrt{x})$

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt[n]{x} = x)$

### L'équation $x^n = a$



### Exercices d'applications :

#### Exercice 1 :

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $x^4 = 16$
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $(x - 1)^3 = -27$

#### Exercice 2 :

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation:  $\sqrt[3]{x} - x = 0$
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation:  $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation:  $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$ .

### 3.2 L'expression conjuguée et ses applications

#### Ordre 3 :

On sait que  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  et  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Il en résulte :  $a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$  et  $a + b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$

Par suite :

$$\begin{aligned}
 (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{**}) \left( \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \right) \\
 (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{**}) \left( \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \right)
 \end{aligned}$$

#### Applications :

- ① Rendre le dénominateur rationnel :

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$

- ② Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{20x^2+7}-3}{x^2+x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{3x-4}-\sqrt{x}}{x-4}$$

**D'ordre 4 :**

On sait que :  $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

Il en résulte que :  $a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$

Et par suite :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+}) \left( \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}} \right)$$

A remarquer qu'on ne peut pas factoriser :  $a^4 + b^4$

**Applications :**

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x-4}-2}{2x^2+x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{2x+1}-1}{\sqrt[3]{2x+8}-2}$$

**4) Puissance rationnelle :****4.1 Puissance entier****Rappelle :**

Soit  $x$  un réel et  $n$  un entier naturel non nul on a :  $x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}$  et  $x^0 = 1$  ( $x \neq 0$ )

Pour  $x \neq 0$  on a  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

**4.2 Puissance rationnelle****Propriété :**

Pour tout réel  $x \geq 0$  et pour tout entier non nul  $q$  on pose :  $\sqrt[q]{x} = x^{\left(\frac{1}{q}\right)}$

**Preuve :** (en exercice)**Définition :**

Soit  $x$  un réel positif et  $r$  un rationnel ( $r \in \mathbb{Q}$ ) ;  $r = \frac{p}{q}$  où  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  on pose :

$$x^r = x^{\left(\frac{p}{q}\right)} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

**Propriétés**

Soit  $x$  et  $y$  deux réels positifs,  $r$  et  $r'$  des rationnels on a :

1.	$x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$
2.	$x^{r \times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$
3.	$x^{-r'} = \frac{1}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
4.	$x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
5.	$(xy)^r = x^r y^r$
6.	$\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

**Exercice 1 :**

Démontrer 1 et 2

**Exercice 2 :**

Comparer les nombres  $a = \sqrt[3]{5}$  et  $b = \sqrt[4]{20}$

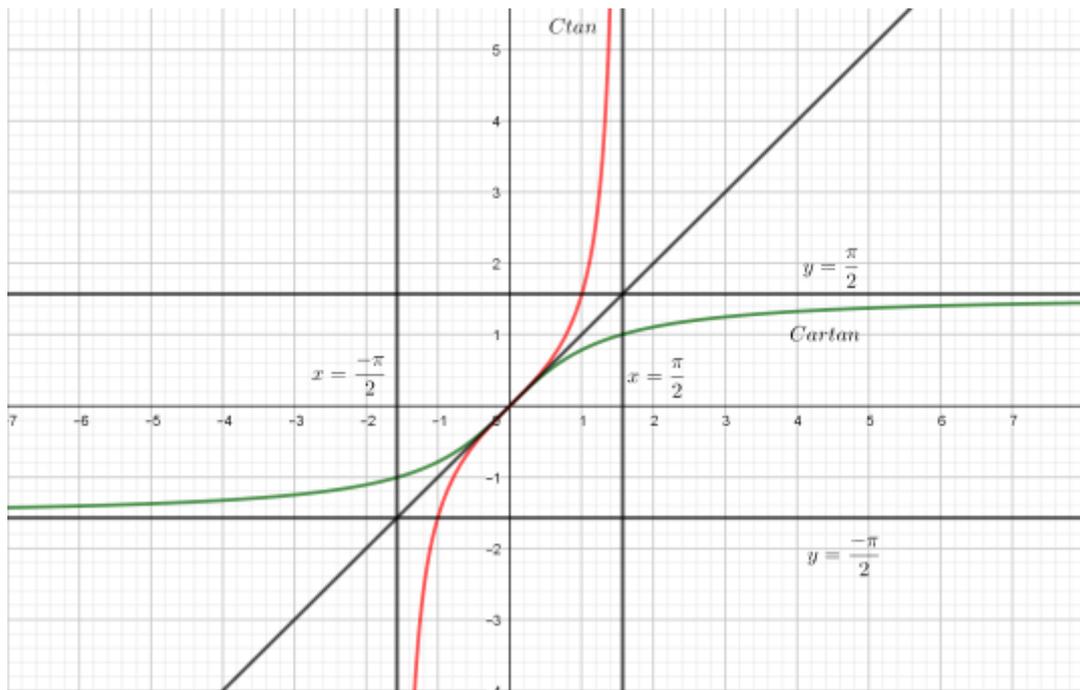
**Application aux calculs des limites.**

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{2x^2 + 3x} - \sqrt[4]{3x^3 + x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^2 + 3x} - 2\sqrt[3]{x^2 - x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x-1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{x^q + 1} - \sqrt[q]{x^p + 1}$  (discuter suivant les valeurs de  $p$  et  $q$ )

**5) la fonction Arctangente :****Activité :**

1- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow (\frac{-\pi}{2})^+} \tan x$  et  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x$

2- Montrer que la restriction de la fonction  $\tan$  sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  est une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  vers  $\mathbb{R}$ .**Propriété et définition :**La restriction de la fonction  $\tan$  sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  est une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  vers  $\mathbb{R}$ .Sa bijection réciproque s'appelle la fonction **Arctangente**, notée : **artan** elle est définie de  $\mathbb{R}$  vers  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ **La courbe de la fonction arctan :****Résultats :**

①  $\begin{cases} \arctan x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \end{cases}$

②  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

③  $(\forall x \in \mathbb{R})(\tan(\arctan x) = x)$  et  $(\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[)(\arctan(\tan x) = x)$

④ La fonction  $\arctan$  est impaire strictement croissante sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

⑤  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \left( \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \right)$  et  $(\forall x \in \mathbb{R}^-) \left( \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\pi}{2} \right)$  (Propriété à démontrer)

### **Exercice 1 :**

Déterminer les réels suivants:

$$a = \text{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{3\pi}{22}\right)\right); \quad b = \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{144\pi}{4}\right)\right); \quad c = \tan(\text{Arctan}\sqrt{123})$$

### **Exercice 2 :**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \in ]-1,1[$  et  $b \in ]-1,1[$

1- Montrer que:  $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

2- Etudier le cas où  $a > 1$  et  $b > 1$

3- Résoudre dans  $\mathbb{R}$

$$\arctan\left(\frac{1-\sqrt{x}}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

### **Exercice 3 :**

Déterminer les limites suivantes :

$$1. \quad 1- \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\text{Arctan}x - 1}{4x - \pi} \quad 2- \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2\arctan x - \pi) \quad 3- \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{Arctan}(2x^2 + x)}{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1} \right)$$