

# LIMITE ET CONTINUITÉ

## I) LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT COMPLÉMENTS (limite à droite et à gauche et opérations sur les limites)

### 1) Rappelles ;

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

1) Le centre de l'intervalle  $]a, b[$  est le réel

$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

2) Le rayon de l'intervalle  $]a, b[$  est le réel positif

$$r = \frac{b-a}{2}$$

3) L'ensemble :  $]a; b[* = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\} - \{x_0\}$  où

$x_0$  est le centre de l'intervalle  $]a, b[$  :

S'appelle l'intervalle Pointé de bornes  $a$  et  $b$ .

4) Si  $r$  est le rayon de l'intervalle  $]a, b[$  et  $x_0$  son

centre alors :  $]a; b[* = ]x_0 - r; x_0 + r[ - \{x_0\}$

$$x \in ]x_0 - r; x_0 + r[ - \{x_0\} \Leftrightarrow |x - x_0| < r$$

$$x \in ]x_0 - r; x_0 + r[ - \{x_0\} \Leftrightarrow |x - x_0| < r$$

**Exercice1** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 1$

Montrer en utilisant la définition que :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$

**Solution** : Montrons que :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x)-6| < \varepsilon ?$$

$$\text{Soit : } I = \left]1 - \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2}\right[ = \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[$$

$$x \in \left]1 - \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2}\right[ \text{ donc}$$

$$|f(x) - 6| = |2x^2 + 3x - 5| = |x-1||2x+5|$$

$$x \in \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[ \text{ donc : } |x-1| < \frac{1}{2}$$

$$x \in \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[ \text{ donc : } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \text{ donc : } 6 < 2x+5 < 8$$

$$\text{donc : } |2x+5| < 8 \text{ donc : } |2x+5||x-1| \leq 8|x-1|$$

Soit  $\varepsilon > 0$  on cherche  $\alpha > 0$  tel que :

$$0 < |x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x)-6| < \varepsilon$$

Pour avoir  $\Rightarrow |f(x)-6| < \varepsilon$  il suffit d'avoir  $8|x-1| < \varepsilon$

$$\text{et } |x-1| < \frac{1}{2} \text{ cad } |x-1| < \frac{\varepsilon}{8} \text{ et } |x-1| < \frac{1}{2}$$

Il suffit de prendre  $\alpha$  le plus petit des

$$\text{nombre : } \frac{\varepsilon}{8} \text{ et } \frac{1}{2} \text{ cad } \alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{8}; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$$

### 2) unicité de la limite

**Propriété** : si une fonction admet une limite en un point alors cette limite est unique

**Preuve** : soit  $f$  une fonction qui admet une limite en  $x_0$  (raisonnement par l'absurde)

On suppose que  $f$  admet deux limites :  $l_1 \neq l_2$

$$\text{En prend : } \varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2} > 0$$

On a donc :

$$(\exists \alpha_1 > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x-1| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$$

$$\text{Et } (\exists \alpha_2 > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x-1| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon$$

Soit :  $\alpha = \inf(\alpha_1; \alpha_2)$  donc :

$$0 < |x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon \text{ et } |f(x) - l_1| < \varepsilon$$

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2|$$

$$|l_1 - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < \frac{|l_1 - l_2|}{2} + \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

$$|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2| \text{ Absurde}$$

Donc :  $l_1 = l_2$

### 3) limites et opérations

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonction polynôme et  $x_0 \in \mathbb{R}$

et  $a \in \mathbb{R}^*$  alors :

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \text{ si } Q(x_0) \neq 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad 4) \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0 \text{ si } x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

5)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$  si  $x_0 \geq 0$

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$  9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$

10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

**Limite de la somme**

$\lim f$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si  $x$  tend vers  $a+$  ;  $a-$  ;  $+\infty$  ou  $-\infty$

**Limites des produits**

$\lim f$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f \times g$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

**Limites des inverses**

$\lim f$	$\ell \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

**Limites des quotients**

$\lim f$	$\ell$	$\ell$	$\ell \neq 0$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm \infty$	0	$\ell$	0	$\pm \infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm \infty$	$\pm \infty$	?	?

**Limites à droite et à gauche**

**Exemple:** Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de  $f$  en  $x_0 = -1$

**Solution :**

Déterminons  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$  ?

Solution :  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

Si :  $-1 < x < 1$  :  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$

Donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -\frac{x+1}{x-1} = 0$

Si :  $x < -1$  :  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$

Donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x+1}{x-1} = 0$

donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = 0$  donc :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

**4) Exercices : RAPPELLES**

**Exercice2:** Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$

5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$

6)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

**Solutions :** 1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1} = \frac{3}{1} = 3$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$

5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$  ?

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty$  donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$

Et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

on trouve une formes indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x} \text{ or } x \rightarrow +\infty \text{ donc } |x| = x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1} = \frac{1}{2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \text{ On pose } x - \frac{\pi}{4} = h$$

$$\text{donc } x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

$$\text{or : } \tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \times \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1} \times 1 = 2$$

**Exercice3** : Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x) \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ et } h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

3) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

**Solution :**

1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x+1 = 5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} -3x^2+x = -10$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2+x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ? \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\bullet \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} g(x) ? \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}+1 = \sqrt{3}+1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} -2x^2+1 = -17 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+ \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} x^2+1 = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$$

$$4) k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ donc : } D_k = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} -3x+1 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^2-2x = 0$$

Etude du signe de :  $x^2 - 2x$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$x(x-2)$	$+$	$0$	$-$	$+$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2-2x = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2-2x = 0^+$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -3x+1 = -5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2-2x = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2-2x = 0^-$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = +\infty$$

**II) CONTINUITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE EN UN POINT :**

**1) Activité :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-1}; \text{ si } \dots x \neq 1 \\ f(1) = -4 \end{cases}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b) Comparer  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  et  $f(1)$

**Solution :1)**  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2)a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-5)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x - 5 = -4$$

2) b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

On dit que  $f$  est continue en  $x_0 = 1$

**2) Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de centre  $a$ . On dit que la fonction  $f$  est continue en  $a$  si elle admet une limite finie en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  : C'est-à-dire :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

**Exemple1 :** Considérons la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 2x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 \text{ et } f(2) = \frac{1}{2}$$

Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 2$

**Solution :**  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 \sin(x-2)}{x^2 - 2x} = \frac{1}{2} = f(2)$  Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \text{ Donc : } f \text{ est continue en } x_0 = 2$$

**Exemple2 :** Considérons la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right); \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 2$$

Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

**Solution :**  $x \in \mathbb{R}^* \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$  donc :

$$|f(x) - 2| = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2 \text{ et on a } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0)$

Donc :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

**Exercice4 :** Considérons la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}; \text{ si } x \neq 3 \text{ et } f(3) = 7$$

Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 3$

**Solution :** on a :  $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = x + 4$  D.EC

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} x + 4 = 7 = f(3)$$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

Donc :  $f$  est continue en  $x_0 = 3$

**Exercice5 :** Considérons la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\tan x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

**Solution :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} + 1) \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} \times \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = 1 \times \frac{1}{2} = f(0)$$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Donc :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

**Exercice6 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{Par : } \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1}; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases}$$

avec  $m$  paramètre réel

déterminer la valeur du réel  $m$  pour laquelle

$f$  est continue en  $x_0 = 1$

**Solution :**  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

on pose :  $h = x - 1 \quad x \rightarrow 1 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(h+1))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi h + \pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi h)}{\pi h} \pi = -\pi$$

donc  $f$  est continue en  $x_0 = 1$  ssi  $m = -\pi$

**Exercice7 :** Considérons la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} E\left(\frac{3}{x}\right); \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

( $E$  désigne la partie entière)

1) Montrer que  $\left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{|x|}{2}$

2)  $f$  est-elle continue en  $x_0 = 0$ ?

**Solution :**

1) on a :  $x-1 < E(x) \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{3}{x} - 1 < E\left(\frac{3}{x}\right) \leq \frac{3}{x}$$

$$\text{Si } x > 0 : \frac{x}{2} \left(\frac{3}{x} - 1\right) < \frac{x}{2} E\left(\frac{3}{x}\right) \leq \frac{x}{2} \times \frac{3}{x}$$

$$\text{Cad : } \frac{3}{2} - \frac{x}{2} < f(x) \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{donc : } -\frac{x}{2} < f(x) - \frac{3}{2} \leq 0$$

$$\text{donc : } \left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{|x|}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{Si } x < 0 : \frac{x}{2} \times \frac{3}{x} \leq \frac{x}{2} E\left(\frac{3}{x}\right) < \frac{x}{2} \left(\frac{3}{x} - 1\right)$$

$$\text{Cad : } \frac{3}{2} \leq f(x) < \frac{3}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\text{donc : } 0 \leq f(x) - \frac{3}{2} < -\frac{x}{2}$$

$$\text{donc : } \left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{|x|}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*$$

$$\text{finalement : } \left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{|x|}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$2) \text{ on a } \left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{|x|}{2} \quad \text{et on a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{2} = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2} \neq f(0)$$

Donc :  $f$  est discontinue en  $x_0 = 0$

### 3) continuité à droite et à gauche

**Exemple :** Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2; \text{ si } \dots x \leq 0 \\ f(x) = 2 + x; \text{ si } \dots x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 = f(0)$$

On dit que  $f$  est continue à gauche de  $x_0 = 0$

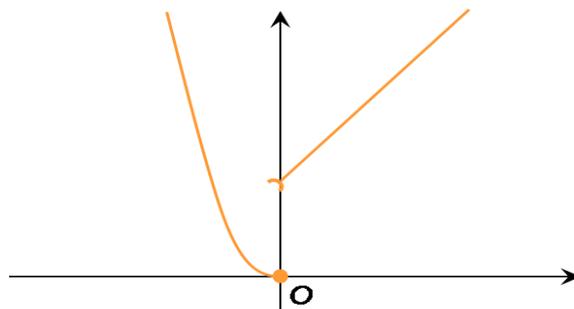
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + x = 2 \neq f(0)$$

On dit que  $f$  n'est pas continue à droite de  $0$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Donc, la limite en  $0$  n'existe pas.

Conséquence :  $f$  ne peut être continue en  $2$



Graphiquement : La courbe de  $f$  ne peut être tracée sur un intervalle contenant  $0$ , « sans lever le crayon ».

**Définition : 1)** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a + r[$  où  $r > 0$

On dit que la fonction  $f$  est continue à droite de  $a$  si elle admet une limite finie à droite en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  :

**2)** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a - r, a]$  où  $r > 0$

On dit que la fonction  $f$  est continue à gauche de  $a$  si elle admet une limite finie à gauche en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

**Exemple :** Soit  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2; \text{ si } \dots x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 1}; \text{ si } \dots x > 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de  $f$  à droite et à gauche de  $x_0 = 0$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 3}{2x - 1} = 3 = f(0)$$

donc  $f$  est continue à droite de  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3 - x^2 = 3 = f(0)$$

donc  $f$  est continue à gauche de  $x_0 = 0$

**Théorème :** Une fonction est continue en un point  $a$  si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de  $a$

Donc :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$  ssi

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

**Exemple 1 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{Par : } \begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{7-3x}; \text{ si } \dots x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}; \text{ si } \dots x > 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 2$

**Solution :** on a :  $f(2) = \frac{2 \times 2 + 1}{7 - 3 \times 2} = \frac{5}{7 - 3 \times 2} = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 3 = 5 = f(2)$$

Donc  $f$  est continue adroite de  $f$  en  $x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + 1}{7 - 3x} = \frac{5}{1} = 5 = f(2)$$

Donc  $f$  est continue gauche en  $x_0 = 2$

Donc  $f$  est continue en  $x_0 = 2$

**Exemple2:** Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$  si  $x \neq 1$

Et :  $f(1) = 2$

Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 1$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x + 1 = 2 = f(1)$$

donc  $f$  est continue à droite de  $x_0 = 1$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -(x + 1) = -2 \neq f(1)$$

donc  $f$  n'est pas continue à gauche de  $x_0 = 1$

donc  $f$  n'est pas continue en  $x_0 = 1$

On 2dit que  $f$  est discontinue en  $x_0 = 1$

#### 4) Prolongement par continuité

**Activité :** Soit la fonction  $h$  définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

2- Déterminer la limite  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ,  $f$  est-elle continue en  $x_0 = -1$ ?

3- Soit la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); si...x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

a) Déterminer  $D_f$

b) Etudier la continuité de la fonction

$f$  en  $x_0 = -1$  La fonction  $f$  s'appelle un

prolongement par continuité de la fonction de  $f$  en -1

4- Peut-on prolonger  $f$  par continuité en  $a = -2$

**Solution :** 1)

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq -2$$

Donc :  $D_f = \mathbb{R} - \{-1; -2\}$

2)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x+2)}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 2} = 3$$

$-1 \notin D_f$  donc  $f$  n'est pas continue en  $x_0 = -1$

3) a)  $\begin{cases} f(x) = f(x); si...x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$  donc :  $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3 = f(-1)$

donc  $f$  est continue en  $x_0 = -1$

4)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} ?$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x^3 + 1 = -7$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + 3x + 2 = 0^- \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

Donc on ne peut pas prolonger  $f$  par continuité en  $a = -2$

**Théorème et définition :** Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D_f$  ;  $a$  un réel tel que  $a \notin D_f$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  (finie)

La fonction  $f$  définie par :  $\begin{cases} f(x) = f(x); si...x \neq a \\ f(a) = l \end{cases}$

Est une fonction continue en  $a$  et s'appelle un prolongement par continuité de la fonction  $f$  en  $a$

**Exemple :** Soit  $f$  une fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \text{ Donner un prolongement par}$$

continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 0$

**Solution :**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times x = 0$

Car :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Donc La fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } \dots x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Est une prolongement par continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 0$

**Exercice 8 :** Soit la fonction  $h$  définie par

$$h(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - E(x)} \quad (E \text{ désigne la partie entière})$$

Peut-on prolonger  $h$  par continuité en  $a = 2$  ?

### III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

#### 1) Continuité sur un intervalle

**Définition :**

Soit  $f$  une fonction dont le domaine de définition est  $D_f$ , soit  $]a, b[$  un intervalle inclus dans  $D_f$

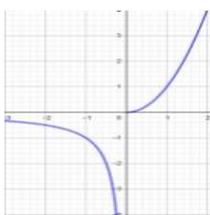
- 1) On dit que  $f$  est continue sur l'ouvert  $]a, b[$  si elle est continue en tout point de  $]a, b[$
- 2) On dit que  $f$  est continue sur  $]a, b[$  si elle est continue sur  $]a, b[$  et à droite de  $a$
- 3) On dit que  $f$  est continue sur  $[a, b[$  si elle est continue sur  $]a, b[$ , à droite de  $a$  et à gauche de  $b$

**Remarque :**

- 1) Si une fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et sur  $[b, c]$  elle est continue sur  $[a, c]$
- 2) En général si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et sur un intervalle  $J$  et si  $I \cap J \neq \emptyset$  alors  $f$  est continue sur  $I \cup J$ .
- 3)  $f$  peut-être continue sur  $[a, b[$  et sur  $[b, c]$  sans qu'elle soit continue sur  $[a, c]$

Dans le graphique ci-dessous  $f$  est continue sur

$$[-3, 0[ \text{ et } \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}; \text{ si } \dots x < 0 \\ f(x) = x^2; \text{ si } \dots x \geq 0 \end{cases}$$



continue sur  $[0, 2]$  mais pas continue sur  $[-3, 0]$  car elle n'est pas continue en 0

#### 2) Opérations sur les fonctions continues

**Propriétés :** 1) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$  alors :

a)  $f + g$    b)  $f \times g$    c)  $|f|$

Sont des fonctions continues en  $a$

2) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$  et  $g(a) \neq 0$  alors

a)  $\frac{1}{g}$    b)  $\frac{f}{g}$  sont des fonctions continues en  $a$ .

3) Si  $f$  une fonction continue en  $a$  et  $f(a) \geq 0$  alors :  $\sqrt{f}$  est continue en  $a$

**Remarque :** La propriété précédente reste vraie soit à droite de  $a$ , à gauche de  $a$  ou sur un intervalle  $I$  (En tenant compte des conditions)

**Propriétés :** 1) Toute fonction polynôme est continue sur  $\mathbb{R}$

2) Les fonctions  $\sin$  et  $\cos$  sont continue sur  $\mathbb{R}$

**Exemples :**

1)  $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$

$x^2 + x + 3$  Est continue sur  $\mathbb{R}$  car c'est une fonction polynôme donc elle est continue sur  $\mathbb{R}$  de plus  $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 3 \geq 0)$  (Son discriminant  $\Delta$  est négatif)

2)  $g(x) = \frac{x^4 + x^3 - 6}{x^2 + 2x - 3}$  est continue sur :

$] - \infty, -3[$  ; sur  $] - 3, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$ .

3) La fonction  $\tan$  est continue sur tous les intervalles de la forme :  $] -\pi/2 + k\pi ; \pi/2 + k\pi[$  (où  $k \in \mathbb{Z}$ )

#### 3) Continuité de la composition de deux fonctions.

**Théorème :** Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  tels que  $f(I) \subset J$  et  $x_0$  un élément de  $I$ .

1) Si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $g$  continue en  $f(x_0)$  alors  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

2) Si  $f$  est continue  $I$  et  $g$  continue en  $f(I)$  alors  $g \circ f$  est continue  $I$ .

**Preuve :** (En utilisant la définition)

Montrons que :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon$

On a  $g$  est continue en  $f(x_0)$  donc :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \beta > 0)(|t - f(x_0)| < \beta \Rightarrow$$

$$|g(t) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad (R)$$

et puisque  $f(I) \subset J$  donc :  $(\forall x \in I)(f(x) \in J)$

(On pose  $t = f(x)$  dans  $(R)$  ) on obtient :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \beta > 0)(|f(x) - f(x_0)| < \beta \Rightarrow$

$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$  (\*)

Pour  $\beta > 0$  ( $\exists \alpha > 0$ )  $(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow$

$|f(x) - f(x_0)| < \beta$  (car  $f$  est continue en  $x_0$ )

$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$  (\*) C.Q.F.D

**Exemples :1)** Soit  $f$  une fonction définie par

$$f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$$

Montrons que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Puisque les fonctions :  $f_1 : x \rightarrow 2x^2 - 3x + 4$  et

$f_2 : x \rightarrow \cos x$  sont continues sur  $\mathbb{R}$

Et  $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$  alors :  $f = f_2 \circ f_1$  est continue

sur  $\mathbb{R}$

2) Soit  $g$  une fonction définie par

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{1 + \sin^2 x}}$$

Montrons que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$

On a :  $D_g = [0; +\infty[$  et Puisque la fonction :

$g_1 : x \rightarrow \frac{x}{1 + \sin^2 x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et

$g_1(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$  et  $g_2 : x \rightarrow \sqrt{x}$  sont continue sur  $\mathbb{R}^+$

Donc :  $g = g_2 \circ g_1$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$

3) Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par

$$\begin{cases} f(x) = x + 1; \text{ si } \dots x < 0 \\ f(x) = 0; \text{ si } \dots x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et } g(x) = 5$$

Montrons que  $f$  n'est pas continue en  $x_0 = 0$

et  $h = g \circ f$  est continue en  $x_0 = 0$

En effet : on a  $f(0) = 0$

et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 = 1 \neq f(0)$

Et  $g$  est continue en  $x_0 = 0$

mais on a :  $(g \circ f)(x) = 5$  est continue en  $x_0 = 0$

4)  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car

$x \rightarrow x^2 + 1$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annule pas

sur  $\mathbb{R}$  donc :  $x \rightarrow \frac{1}{x^2 + 1}$  est continue sur  $\mathbb{R}$

et  $(\forall x \in \mathbb{R}) \left(\frac{1}{x^2 + 1} \in \mathbb{R}\right)$  et  $\sin$  est continue sur  $\mathbb{R}$

### 3) Limite de *vous*

**Théorème** : Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $x_0$  telle  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$

si  $v$  est continue en  $l$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = v(l)$

**Preuve** : On a :  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l \in \mathbb{R}$  donc  $u$  admet

un prolongement par continuité  $u$  définie

comme :  $\begin{cases} u(x) = u(x); \text{ si } \dots x \neq x_0 \\ u(x_0) = l \end{cases}$

La fonction  $u$  étant continue en  $x_0$ ; et  $v$  est

continue en  $u(x_0) = l$  alors et d'après le

théorème de la composition  $v \circ u$  est continue

en  $x_0$  et par suite :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = (v \circ u)(x_0) = v(l)$$

**Exemples** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \pi\right)$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

**Solution :1)**

Soient :  $f : x \rightarrow \frac{1 - \cos x}{x^2} \pi$  et  $g : x \rightarrow \sin x$

Puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \pi = \frac{\pi}{2}$   $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Donc continue en  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

2) puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}} = \pi$

Et la fonction :  $x \rightarrow \cos x$  continue en  $\pi$

donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) = \cos \pi = -1$

**Exercice9** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right)$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right)$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}}$$

**Solution :1)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \tan x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{3} \frac{\tan x}{x} = \frac{\pi}{3}$

et Puisque :  $x \rightarrow \cos x$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Donc continue en  $x_0 = \frac{\pi}{3}$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left( \frac{\pi \tan x}{3x} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2}{4x^2} = \frac{\pi}{4}$

et Puisque :  $x \rightarrow \sin x$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Donc continue en  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  donc :

donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \left( \frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{0}$  donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{x^2}{1 - \cos x} = 4$

donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}} = 2$  :  $x \rightarrow \sqrt{x}$  est continue en 4

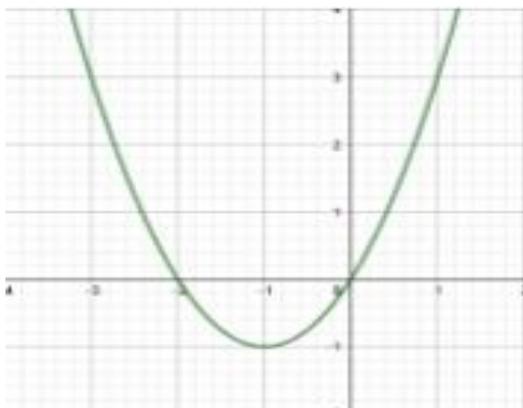
donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}} = \sin 2$  car :  $x \rightarrow \sin x$  est

continue en 2

#### IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

##### 1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

**Activité** : Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction  $f(x) = x^2 + 2x$



1- Déterminer graphiquement les images des intervalles :  $I_1 = [0, 1]$ ,  $I_2 = [-3, -1]$ ;  $I_3 = [-3, 1]$

2- Montrer algébriquement que  $f([-3, 1]) = [-1, 3]$

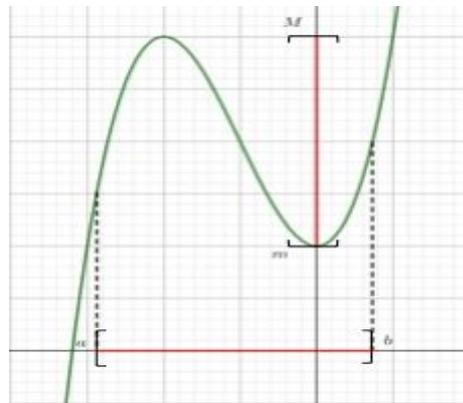
**Rappelle** :  $f(I) = J \Leftrightarrow f(I) \subset J$  et  $J \subset f(I)$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I)(f(x) \in J) \text{ et } (\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y)$$

#### Théorème : (Admis)

L'image d'un segment  $[a, b]$  par une fonction continue est le segment  $[m, M]$  où :

$$m = \min_{x \in [a; b]} f(x) \text{ et } M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$$

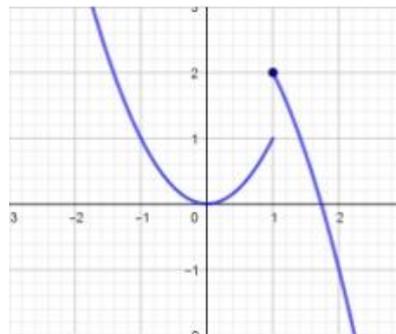


#### Cas particulier :

1) Si  $f$  est continue croissante sur  $[a, b]$  alors  $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

2) Si  $f$  est continue décroissante sur  $[a, b]$  alors  $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$

**Remarque** : La continuité dans le théorème précédent est suffisante mais pas nécessaire. Dans la figure ci-contre  $f$  n'est pas continue



Mais  $f([0, 2]) = [f(2), f(1)] = [-1, 2]$

#### 2) Image d'un intervalle.

##### 2.1 Théorème général

**Théorème (admis)** : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

**Exemples** :  $f(x) = x^2 + 2x$

Graphiquement en a : (le graphe ci-contre)

$$f([-1, 2]) = [-1, 3] \text{ et } f([0, 2[) = [-1, 0]$$

$$f(]-1, 0]) = [0, 3[ \text{ et } f([2, +\infty[) = [0, +\infty[$$

$$f(]-\infty, 1]) = [-1, +\infty[$$

**Remarque** : L'intervalle  $I$  et son image  $f(I)$  par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme.

## 2.2 Cas d'une fonction strictement monotone

1)  $f$  continue et strictement croissante sur

L'intervalle  $I$  et  $a \in I$  et  $b \in I$

$$f([a;b]) = [f(a); f(b)] \text{ et } f([a;b[) = \left[ f(a); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$$

$$f(]a;b]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); f(b) \right] \text{ et } f(]a;b[) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$$

2)  $f$  continue et strictement décroissante sur

L'intervalle  $I$  et  $a \in I$  et  $b \in I$

$$f([a;b]) = [f(b); f(a)] \text{ et } f([a;b[) = \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x); f(a) \right[$$

$$f(]a;b]) = \left] f(b); \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right] \text{ et } f(]a;b[) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$$

**Remarque :** Si  $f$  n'est pas strictement monotone sur l'intervalle  $I$ , on peut utiliser les propriétés précédentes en subdivisant

L'intervalle  $I$  en intervalles où  $f$  est strictement monotone et on utilise la propriété :

$$f(I_1 \cup I_2) = f(I_1) \cup f(I_2)$$

**Exemple :** Soit  $f$  une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

Déterminer les images des intervalles suivants :

$$[0, 1]; [-2, -1]; ]-1, 1]; [2, +\infty[$$

**Solution :**  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$

$$\left| \begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = 2 + 3 = 5 > 0 \text{ donc : } f \text{ continue et}$$

strictement croissante sur les intervalles  $]-\infty; -1[$

$$\text{et } ]-1; +\infty[ \text{ donc on a : } f([0;1]) = [f(0); f(1)] = \left[ -3; \frac{-1}{2} \right]$$

$$f([-2; -1[) = \left[ f(-2); \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) \right[ = [7; +\infty[$$

$$f(]-1; 1]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x); f(1) \right] = \left] -\infty; \frac{-1}{2} \right]$$

$$f([2; +\infty[) = \left[ f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = \left[ \frac{1}{3}; 2 \right[$$

## V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERE – TVI.

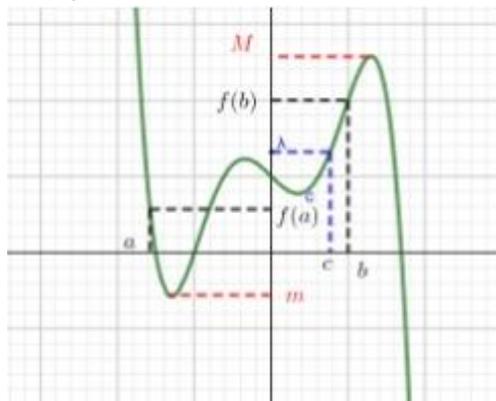
### 1) Cas général

**Théorème T.V.I :** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$

**Preuve :**

Rappelons que :  $f(I) = J \Leftrightarrow (\forall x \in I)(f(x) \in J)$  et  $(\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y)$

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$



$a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  tels que :  $a < b$ .

On sait que  $f([a, b]) = [m, M]$

$$\text{où } m = \min_{x \in [a; b]} f(x) \text{ et } M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$$

On a donc  $f(a) \in [m, M]$  et  $f(b) \in [m, M]$ .

Soit  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  on a donc :

$\lambda \in [m, M]$  et puisque  $f([a, b]) = [m, M]$  donc  $\lambda$  admet au moins un antécédent  $c$  dans l'intervalle  $[a, b]$ .

D'où pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$

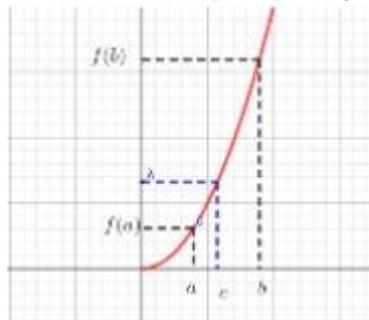
il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$

### 2) Cas $f$ strictement monotone.

**Théorème T.V.I (cas  $f$  strictement monotone)**

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur  $[a, b]$ .

Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe un et un seul  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$



**Remarque :** L'expression " Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe un et un seul  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$  " peut-être formulée comme :  
 " Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  l'équation  $f(x) = \lambda$  admet une solution unique dans  $[a, b]$

### 3) Corolaires

**Corolaire1 (T.V.I) :** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Si  $f(a) \times f(b) < 0$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$

**Preuve :**  $f(a) \times f(b) < 0$  veut dire que :  
 $f(a)$  et  $f(b)$  ont des signes opposés donc 0 est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . On prend  $\lambda = 0$  dans le théorème général des valeurs intermédiaires.

### Corolaire2 (T.V.I) :

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur  $[a, b]$ . Si  $f(a) \times f(b) < 0$  il existe un et un seul  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = 0$

### 4) Applications :

**Exemple1 :** Montrer que l'équation :

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0 \text{ admet une racine dans chacune}$$

des intervalles suivants :  $]-1; -\frac{1}{2}[$  ;  $]-\frac{1}{2}; 0[$  et  $]0; 1[$

**Solution :** on considère la fonction :  $g$  tel que

$$g(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$$

• On a :  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur tout intervalle de  $\mathbb{R}$

○ Et on a :  $g(-1) = -\frac{3}{2}$  et  $g(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$  donc :

$$g(-\frac{1}{2}) \times g(-1) < 0 \text{ donc : d'après le (T.V.I)}$$

il existe  $\alpha_1 \in ]-\frac{1}{2}; -1[$  tel que :  $g(\alpha_1) = 0$

○ Et on a :  $g(0) = -\frac{1}{2}$  et  $g(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$  donc :

$$g(-\frac{1}{2}) \times g(0) < 0 \text{ donc : d'après le (T.V.I)}$$

il existe  $\alpha_2 \in ]-\frac{1}{2}; 0[$  tel que :  $g(\alpha_2) = 0$

○ Et on a :  $g(0) = -\frac{1}{2}$  et  $g(1) = \frac{1}{2}$  donc :

$$g(1) \times g(0) < 0 \text{ donc : d'après le (T.V.I)}$$

il existe  $\alpha_3 \in ]0; 1[$  tel que :  $g(\alpha_3) = 0$

donc l'équation :  $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$  admet 3 racines

différentes dans chacune des intervalles:

$$]-1; -\frac{1}{2}[ ; ]-\frac{1}{2}; 0[ \text{ et } ]0; 1[$$

**Exemple2 :** Montrer que l'équation :  $x^3 + x + 1 = 0$

Admet une racine unique dans  $]-1; 0[$

**Solution :** on considère la fonction :  $f$  tel que

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

• On a :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur  $]-1; 0[$

• on a :  $f(-1) = -1$  et  $f(0) = 1$  donc :

$$f(0) \times f(-1) < 0$$

•  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$  sur  $]-1; 0[$  donc  $f$  strictement croissante sur  $]-1; 0[$

Donc : d'après le (T.V.I) l'équation  $f(x) = 0$

admet une solution unique dans  $]-1; 0[$

**Exercice10 :** Montrer que l'équation :  $\cos x = x$

Admet au moins une racine dans intervalle :

$$I = [0; \pi]$$

**Solution :**  $\cos x = x \Leftrightarrow \cos x - x = 0$

On pose :  $f(x) = \cos x - x$

• On a :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur  $I = [0; \pi]$

• on a :  $f(\pi) = -1 - \pi < 0$  et  $f(0) = 1$  donc :

$$f(0) \times f(\pi) < 0$$

Donc : d'après le (T.V.I)

il existe  $\alpha \in ]0; \pi[$  tel que :  $f(\alpha) = 0$

**Exercice11 :** Montrer que l'équation :  $1 + \sin x = x$

Admet au moins une racine dans intervalle :

$$I = \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$$

**Solution :**  $1 + \sin x = x \Leftrightarrow 1 + \sin x - x = 0$

On pose :  $f(x) = 1 + \sin x - x$

• On a :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur  $I = \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$

• on a :  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4-\pi}{2} > 0$  et

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6+3\sqrt{3}-4\pi}{6} < 0 \text{ donc : } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \times f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$$

Donc : d'après le **(T.V.I)**

il existe  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right[$  tel que :  $f(\alpha) = 0$

**Exercice12** : on considère la fonction :  $f$  tel que

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

1) Montrer que l'équation :  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation :  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]0;1[$

3) étudier le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$

**Solution :**

1)a) On a :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est une fonction polynôme)

b)  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$  sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

c) on a :  $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = ]-\infty; +\infty[$  et on a :  $0 \in f(\mathbb{R})$

donc d'après le **(T.V.I)** l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$

1) on a  $f$  est continue sur  $[0;1]$  et

$$f(0) \times f(1) < 0 \quad (f(0) = -1 \text{ et } f(1) = 1)$$

et  $f$  strictement croissante sur  $[0;1]$

Donc : d'après le **(T.V.I)** l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $\alpha \in ]0;1[$

3) étudions le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$

1cas : si  $x \leq \alpha$  alors  $f(x) \leq f(\alpha)$  (car  $f$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ )

$$\text{Donc } f(x) \leq 0 \text{ (car } f(\alpha) = 0)$$

2cas : si  $x \geq \alpha$  alors  $f(x) \geq f(\alpha)$  (car  $f$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ )

Donc  $f(x) \geq 0$  (car  $f(\alpha) = 0$ )

## VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

### 1) Le théorème

**Activité :** Soit  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1- Montrer que pour tout  $y$  dans  $I = ]0, +\infty[$ , l'équation  $f(y) = x$  admet une solution unique dans l'intervalle  $J = ]0,1]$

2- Etudier la monotonie et la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

On dit que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque de  $J = ]0, 1]$  vers  $I = ]0, +\infty[$

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , On a  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie de  $J = f(I)$  vers  $I$ .

**Preuve :** Puisque  $f$  est continue et strictement monotone alors l'image de l'intervalle  $I$  est l'intervalle  $J = f(I)$

Donc  $f$  est surjective par construction car :

$$(\forall x \in J = f(I)) (\exists y \in I) (f(y) = x)$$

Montrons que  $f$  est injective de  $I$  vers  $f(I)$

On suppose pour la démonstration que  $f$  est strictement croissante (même démonstration si  $f$  est strictement décroissante)

Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux éléments distincts de  $I$  (On suppose que  $y_1 > y_2$ )

On a donc (puisque  $f$  est strictement croissante)  $f(y_1) > f(y_2)$  donc  $f(y_1) \neq f(y_2)$  et finalement  $f$  est injective

donc  $f$  est une bijection de  $I$  vers  $f(I)$

D'où  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  et on a :

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in f(I)$$

$$(f^{-1} \circ f)(y) = y \quad \forall y \in I$$

### 2) Application :

**Exemple1 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

1) Montrer que la fonction  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = ]-2; +\infty[$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un  $J$  qu'il faut déterminer.

2) Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $J$

**Solution : 1)**  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$   $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)' = \frac{(x-3)'(x+2) - (x-3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1(x+2) - 1 \times (x-3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$1$	$+\infty$	$-\infty$

puisque  $g$  est strictement croissante et continue  
**sur** :  $I = ]-2; +\infty[$

donc  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur  $J = g(I) = g(]-2; +\infty[) = ]-\infty; 1[$

$$2) \begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in g(I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in ]-2; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \frac{y-3}{y+2} = x \Leftrightarrow y-3 = x(y+2)$$

$$\Leftrightarrow y - xy = 2x + 3 \Leftrightarrow y(1-x) = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x+3}{1-x} \text{ Donc } g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$$

$$g^{-1} : ]-\infty; 1[ \rightarrow ]-2; +\infty[$$

Donc :  $x \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$

**Exercice 13:** Soit  $f$  la fonction définie sur

$$I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[ \text{ par : } f(x) = \sqrt{2x-1}$$

1) Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un  $J$  qu'il faut déterminer.

2) Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $J$

3) Représenter  $(C_f)$  et  $(C_{f^{-1}})$  dans le même

repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

**Solution :** 1)  $D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[ = I$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[ f'(x) = (\sqrt{2x-1})' = \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$$

$x$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$0$	$+\infty$

Donc :  $f$  est strictement croissante et continue

**sur** :  $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[ = I$

donc  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$

définie sur  $J = f(I) = f\left(\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\right) = [0; +\infty[$

$$2) \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in [0; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2y-1} = x \Leftrightarrow 2y-1 = x^2$$

$$\Leftrightarrow 2y = x^2 + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 1}{2}$$

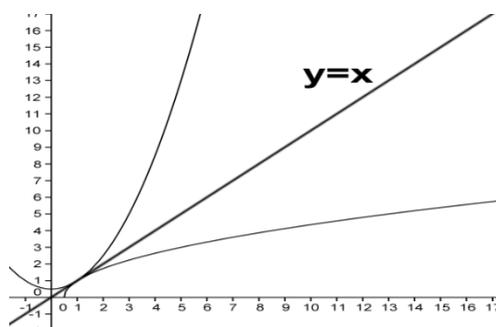
$$\text{Donc } f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$$

$$\text{Donc : } f^{-1} : [0; +\infty[ \rightarrow \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$$

3)  $(C_{f^{-1}})$  et  $(C_f)$  sont symétriques par rapport à

$(\Delta) y = x$



### 3) Propriété de la fonction réciproque

**Propriété 1 :** Si  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  alors  $f^{-1}$  a la même monotonie sur  $J$  que celle de  $f$  sur  $I$ .

**Preuve :**

$$T_{f^{-1}} = \frac{f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{f(x_1) - f(x_2)}$$

$$T_{f^{-1}} = \frac{1}{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{y_1 - y_2}}$$

Donc le taux de  $f^{-1}$  sur  $J$  à le même signe que le taux de  $f$  sur  $I$

Et on conclut.

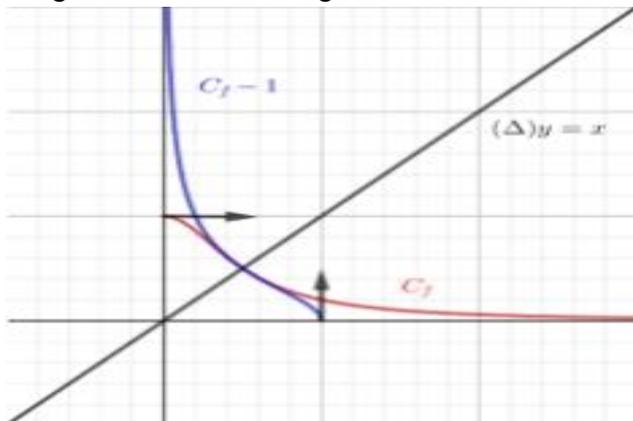
**Propriété 2 :** Si  $f$  admet une fonction réciproque

$f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  alors  $(C_{f^{-1}})$  et  $(C_f)$  sont

symétriques par rapport à  $(\Delta) y = x$

**Remarque :**

La symétrie des deux courbes concerne toutes leurs composantes ; les asymptotes ; les tangentes et demi-tangentes...



#### 4) La fonction racine $n$ -ème

##### 4.1 Définition et règles de calculs

**Propriété et définition :**

Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$  ; la fonction :

$f : x \rightarrow x^n$  est une fonction continue strictement

croissante sur  $\mathbb{R}^+$  elle admet donc une fonction

réciproque  $f^{-1}$  de  $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}^+$

La fonction réciproque  $f^{-1}$  s'appelle la fonction

racine  $n$ -ème et se note  $\sqrt[n]{x}$

**Conséquence de la définition :**

1) La fonction  $\sqrt[n]{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$

2)  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt[n]{x} \geq 0$

3)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

4) La fonction  $\sqrt[n]{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  strictement croissante.

5)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$

6)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall a \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n$

7)  $(\forall a \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n$

8)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$

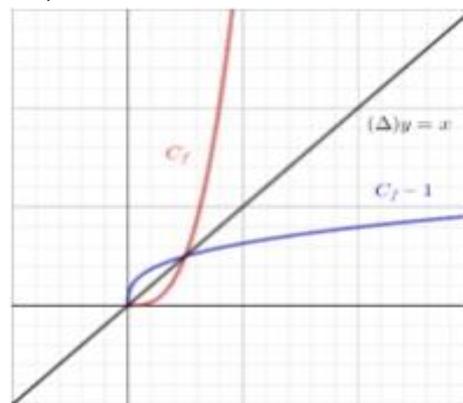
9)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall p \in \mathbb{N}) (\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$

10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

11) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

12) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$  et  $l \geq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

13) La courbe de la fonction  $\sqrt[n]{x}$



**Règle de calcul :**

1)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x \times y} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$

2)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+}) \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

3)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[n \times p]{x}$

4)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times p]{x^p}$

(à prouver)

**Remarque :**

1)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

2)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[1]{x} = x$

##### 4.2 Résolution de l'équation $x^n = a$

**Exemples :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $x^5 = 32$    2)  $x^7 = -128$    3)  $x^4 = 3$    4)  $x^6 = -8$

**Solutions : 1)  $x^5 = 32$  donc  $x > 0$**

$x = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2^5} \Leftrightarrow x = 2$    **donc :  $S = \{2\}$**

2)  $x^7 = -128$  donc  $x < 0$

Donc :  $x = -\sqrt[7]{128} \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{2^7} \Leftrightarrow x = -2$

Donc :  $S = \{-2\}$

$$3) x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{3} \text{ ou } x = -\sqrt[4]{3}$$

$$\text{Donc : } S = \{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\}$$

$$4) x^6 = -8$$

On a  $x^6 \geq 0$  et  $-8 < 0$  donc  $S = \emptyset$

### Exercices d'applications :

**Exercice14** : simplifier les expressions

$$\text{suivantes : 1) } (\sqrt[3]{2})^3 \quad 2) \sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$$

$$3) A = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[3]{3}}$$

$$4) B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt{\sqrt[3]{4}} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$$

$$5) C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} \quad 6) D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}}$$

$$7) E = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}} \quad 8) F = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$$

$$\text{Solutions : 1) } (\sqrt[3]{2})^3 = 2 \quad 2) \sqrt[2]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[2 \times 4]{2} = \sqrt[8]{2}$$

$$2) A = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[5]{2^5} - 2 + \sqrt[3]{2^9} + \sqrt[4]{\frac{96}{3}}$$

$$A = 2 - 2 + \sqrt[2]{2^9} + \sqrt[5]{32} = 2 - 2 + 2 + 2 = 4$$

$$3) B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2^4} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$$

$$4) B = \frac{2^{\frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{15}}}{\sqrt[15]{2^8}} = \frac{2^{\frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}} = \frac{2^{\frac{23}{225}}}{2^{\frac{8}{15}}} = 2^{\frac{23}{225} - \frac{120}{225}} = 2^{-\frac{97}{225}} = 2^{-\frac{15}{225}} = 2^{-\frac{1}{15}} = 2^{\frac{1}{15}}$$

$$5) C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{(3^3)^{\frac{2}{9}} \times (3^4)^{\frac{1}{4}} \times (3^2)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3^1 \times 3^5}{3^{\frac{17}{3}}}$$

$$C = \frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}} = 3^{\frac{20}{3} - \frac{17}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$$

$$6) D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 2^7 \times 10^6}{(3^3)^2}} = \sqrt[6]{\frac{10^6}{3^6}} \times 2^{12} =$$

$$D = \sqrt[6]{\left(\frac{10}{3}\right)^6} \times \sqrt[6]{(2^2)^6} = \frac{10}{3} \times 2^2 = \frac{40}{3}$$

$$7) E = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}} = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{2^3}}{\sqrt[10]{2^7}} = \frac{10\sqrt[2]{2^2} \times 10\sqrt[2]{2^{15}}}{10\sqrt[2]{2^7}}$$

$$= \frac{\sqrt[10]{2^{17}}}{\sqrt[10]{2^7}} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$$

$$8) F = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} = \frac{4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}} \times \left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$F = \frac{4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{4}}}{4^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{2}{4}}}{2^{\frac{2}{6}}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{2}{4} - \frac{2}{6}} = 2^{\frac{7}{2}}$$

$$F = 2^{2 + \frac{1}{2}} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$$

**Exercice15** : comparer :  $\sqrt[5]{2}$  et  $\sqrt[7]{3}$

**Solutions** : on a :  $\sqrt[n \times m]{x^m} = \sqrt[n]{x}$

$$\sqrt[7]{3} = \sqrt[7 \times 5]{3^5} = \sqrt[35]{243} \text{ et } \sqrt[5]{2} = \sqrt[7 \times 5]{2^7} = \sqrt[35]{128}$$

On a :  $\sqrt[35]{243} > \sqrt[35]{128}$  car  $243 > 128$

Donc :  $\sqrt[7]{3} > \sqrt[5]{2}$

**Exercice 16** : résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$1) \sqrt[5]{3x-4} = 2 \quad 2) (\sqrt[5]{x})^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0$$

**Solutions :1)**

$$\sqrt[5]{3x-4} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt[5]{3x-4})^5 = (2)^5 \Leftrightarrow 3x-4 = 32$$

$$\Leftrightarrow x = 12 \text{ donc : } S = \{12\}$$

$$2) (\sqrt[5]{x})^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0 \text{ on pose : } \sqrt[5]{x} = X$$

L'équation devient :  $X^2 - 5X + 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 2$$

Donc :  $\sqrt[5]{x} = 3$  ou  $\sqrt[5]{x} = 2$

Donc :  $x = 243$  ou  $x = 32$

Donc :  $S = \{32; 243\}$

**Exercice 17** : calcules les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1} \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$$

**Solutions :**

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3+24} = \sqrt[5]{2^3+24} = \sqrt[5]{8+24} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)'' \text{ FI}$$

$$\text{On a : } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1}-1)((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (1)^3}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2} = \frac{1}{1+1 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \left(\frac{0}{0}\right)'' \text{ FI}$$

$$\text{On a : } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 2^3}{(x-8)((\sqrt[3]{x})^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 2^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{(x-8)((\sqrt[3]{x})^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 2^2)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 4} = \frac{1}{12}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+6-8}{(x-1)((\sqrt[3]{2x+6})^2 + 2 \times \sqrt[3]{2x+6} + 2^2)} - \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(\sqrt[3]{2x+6})^2 + 2 \times \sqrt[3]{2x+6} + 2^2} - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{12}$$

6)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[6]{(x^2-2)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2}} = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0^+$$

**Exercice18** : simplifier les expressions

$$\text{suivantes : 1) } A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{252}} \times \sqrt{18}}$$

$$2) \text{ a) comparer : } \sqrt[5]{4} \text{ et } \sqrt[4]{3}$$

$$\text{b) comparer : } \sqrt[3]{28} \text{ et } \sqrt{13}$$

$$\text{c) comparer : } \sqrt[5]{23} \text{ et } \sqrt[15]{151}$$

**Solutions :1)**

$$A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{252}} \times \sqrt{18}} = \frac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt[5]{2^{10} \times 10^5}}{\sqrt[4]{2^6} \times \sqrt[3]{\sqrt{2^8}} \times \sqrt{2 \times 3^2}}$$

$$A = \frac{2^{\frac{10}{3}} \times 2 \times 10}{2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = 20$$

$$2) \text{ a) comparaison de : } \sqrt[5]{4} \text{ et } \sqrt[4]{3}$$

$$\text{on a } \sqrt[n \times m]{x^m} = \sqrt[n]{x}$$

$$\text{et on a : } \sqrt[4]{3} = \sqrt[4 \times 5]{3^5} = \sqrt[20]{243} \text{ et } \sqrt[5]{4} = \sqrt[4 \times 5]{4^4} = \sqrt[20]{256}$$

$$\text{donc } \sqrt[5]{4} > \sqrt[4]{3} \text{ car } 256 > 243$$

$$\text{b) comparaison de : } \sqrt[3]{28} \text{ et } \sqrt{13}$$

$$\text{on a } \sqrt[3]{28} = \sqrt[6]{28^2} = \sqrt[6]{784} \text{ et}$$

$$\sqrt{13} = \sqrt[2]{13} = \sqrt[2 \times 3]{13^3} = \sqrt[6]{2197}$$

$$\text{on a } \sqrt[6]{2197} > \sqrt[6]{784} \text{ car } \sqrt{13} > \sqrt[3]{28}$$

$$\text{b) comparaison de : } \sqrt[15]{151} \text{ et } \sqrt[5]{23}$$

$$\sqrt[5]{23} = \sqrt[15]{23^3} = \sqrt[15]{12167}$$

$$\text{Donc : } \sqrt[5]{23} > \sqrt[15]{151}$$

**4.3 L'expression conjuguée et ses applications**

$$\text{On sait que } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{et } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \text{ Il en résulte :}$$

$$a-b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \text{ et } a+b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$$

Par suite :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x+y}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

## Applications :

**Exercice19 :** 1) Rendre le dénominateur rationnel

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2} \quad b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} \quad c = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}$$

2) Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x$$

**Solutions :** 1)

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2} \text{ on utilise : } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)}{(\sqrt[3]{2}-2)(\sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)}{\sqrt[3]{2^3} - 2^3}$$

$$a = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt[3]{2^3} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)}{-6} = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt[3]{2^3} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)}{2}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times 1 + 1^2)}$$

$$b = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = \sqrt[3]{2} - 1$$

$$c = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2}}{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2})}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2}}{(\sqrt[3]{2})^3 - (\sqrt[3]{5})^3} = -\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}}{3}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2^2}}$$

$$d = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2^2})} = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{5})^3 - (\sqrt[3]{2})^3}$$

$$d = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{3}$$

$$\text{2) a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1} \text{ on utilise :}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1})(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1^2)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})((\sqrt[3]{x})^3 - 1^3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})} = \frac{-6}{2} = \frac{-3}{2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+1} - x)(\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} \times 1 + x^2)}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} \times 1 + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} \times 1 + x^2} = 0$$

**D'ordre 4 :**

$$\text{On sait que } a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$\text{Il en résulte : } a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$$

Par suite :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)$

$$\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

A remarquer qu'on ne peut pas factoriser :

$$a^4 + b^4$$

**Exercice20 :** Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x^2-4} - 2}{2x^2 + x - 3}$$

$$\text{Solutions : } \frac{\sqrt[4]{20x^2-4} - 2}{2x^2 + x - 3} = \frac{\sqrt[4]{20x^2-4} - \sqrt[4]{16}}{2x^2 + x - 3}$$

$$= \frac{20x^2 - 4 - 16}{(2x^2 + x - 3) \left( \sqrt[4]{(20x^2-4)^3} + \sqrt[4]{(20x^2-4)^2} \times 4 + \sqrt[4]{(20x^2-4)16} + \sqrt[4]{16^3} \right)}$$

$$= \frac{20(x+1)}{(2x+3) \left( \sqrt[4]{(20x^2-4)^3} + \sqrt[4]{(20x^2-4)^2} \times 4 + \sqrt[4]{(20x^2-4)16} + \sqrt[4]{16^3} \right)}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x^2-4} - 2}{2x^2 + x - 3} = \frac{1}{8}$$

**Exercice21:** 1) simplifier les expressions

$$\text{suivantes : } A = \frac{\sqrt[5]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\text{et } B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[9]{9}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt[3]{3}}}$$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\text{a) } \sqrt[3]{x-1} = 3 \quad \text{b) } x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$$

$$\text{c) } \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0$$

2) Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$$

**Solution :**

$$A = \frac{\sqrt[5]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[3]{9})^3}{\sqrt[5]{3}} = \frac{(3^5)^{\frac{1}{5}} \times (3^2)^{\frac{1}{3}} \times (3^{\frac{1}{3}})^3}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{3}{3}}}{3^{\frac{1}{5}}}$$

$$A = \frac{3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{\frac{8}{3} - \frac{1}{5}} = 3^{\frac{37}{15}} = (\sqrt[15]{3})^{37}$$

$$B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt{\sqrt[3]{3^3} \times \sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt{3}}} = \frac{(3^2)^{\frac{1}{4}} \times (3^4)^{\frac{1}{6}}}{(3^4)^{\frac{1}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}} \times 3}{(3^4)^{\frac{1}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}}$$

$$B = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{4}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}} = 3^{\frac{3}{2} - \frac{4}{5} - \frac{1}{8}} = 3^{\frac{3}{5} - \frac{4}{8} - \frac{1}{8}} = 3^{\frac{11}{5} - \frac{4}{8} - \frac{1}{8}} = 3^{\frac{55}{40} - \frac{32}{40}} = 3^{\frac{23}{40}}$$

$$B = 3^{\frac{23}{40}} = \sqrt[40]{3^{23}}$$

$$\text{2) a) } \sqrt[3]{x-1} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-1})^3 = 3^3 \Leftrightarrow x-1 = 27$$

$$\Leftrightarrow x = 28 \quad \text{donc : } S = \{28\}$$

$$\text{b) } x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$$

$$\text{on pose : } x^{\frac{1}{3}} = X \quad \text{donc : } X^2 - 7X - 8 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 49 + 32 = 81 > 0$$

$$x_1 = \frac{7+9}{2 \times 1} = \frac{16}{2} = 8 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7-9}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{Donc : } x^{\frac{1}{3}} = 8 \quad \text{ou} \quad x^{\frac{1}{3}} = -1$$

$$x^{\frac{1}{3}} = -1 \quad \text{n'a pas de solutions}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 8 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (8)^3 \Leftrightarrow x = 512$$

$$\text{Donc : } S = \{512\}$$

$$\text{c) } \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0 \quad \text{on a } x \geq 0$$

$$\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x^3} - \sqrt[6]{x^2} - 12 = 0$$

$$\text{on pose : } \sqrt[6]{x} = X \quad \text{donc : } X^3 + X^2 - 12 = 0$$

on remarque que 2 est racine de cette équation

$$\text{donc : } X^3 + X^2 - 12 = (X - 2)(X^2 + 3X + 6)$$

$$X^3 + X^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \quad \text{ou} \quad X^2 + 3X + 6 = 0$$

$\Delta = -15 < 0$  donc  $X^2 + 3X + 6 = 0$  n'a pas de solutions

$$\text{Donc : } X = 2 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^6 = 64$$

$$\text{Donc : } S = \{64\}$$

$$\text{2) a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \quad \text{on a } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)}{(x - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{((\sqrt[3]{x})^3 - 1^3)}{(x - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)} = \frac{1}{1 + 1 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x ((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{(\sqrt[3]{x+1} - 1)((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x ((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (1)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x ((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \left( (\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2 \right) = 1 \times 3 = 3$$

**Exercice 22:**

$$1. \text{ Résoudre dans } \mathbb{R} : x^4 = 16$$

$$2. \text{ Résoudre dans } \mathbb{R} : (x-1)^3 = -27$$

**Exercice 23 :**

$$1. \text{ Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ l'équation: } \sqrt[3]{x} - x = 0$$

$$2. \text{ Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ l'équation :}$$

$$\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$$

$$3. \text{ Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ l'inéquation :}$$

$$\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$$

**5) Puissance rationnelle :**

**5.1 Puissance entier**

**Rappelle :** Soit  $x$  un réel et  $n$  un entier naturel

non nul on a :  $x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}$  et ( $x \neq 0$ )

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

## 5.2 Puissance rationnelle

**Propriété :** Pour tout réel  $x \geq 0$  et pour tout entier

non nul  $q$  on pose :  $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$

**Définition :**

Soit  $x$  un réel positif et  $r$  un rationnel ( $r \in \mathbb{Q}$ ) ;

$r = \frac{p}{q}$  où  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  on pose :

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p$$

**Exemple :**  $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$

$$2^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{2^{-2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{4}}$$

**Propriétés**

Soit  $x$  et  $y$  deux réels positifs,  $r$  et  $r'$  des rationnels on a :

1. $x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$
2. $x^{r \times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$
3. $x^{-r'} = \frac{1}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
4. $x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
5. $(xy)^r = x^r y^r$
6. $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

## 6) la fonction Arctangente :

**Activité :** 1- Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$$

2- Montrer que la restriction de la fonction  $\tan$

sur  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  est une bijection de  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  Vers  $\mathbb{R}$ .

**Propriété et définition :** La restriction de la

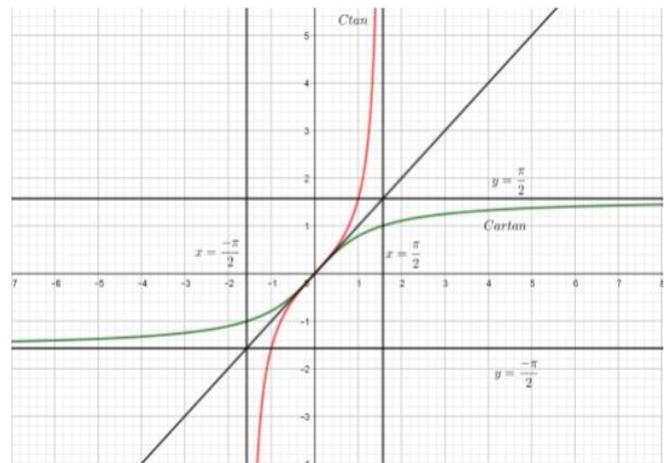
fonction  $\tan$  sur  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  est une bijection de

$\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  Vers  $\mathbb{R}$ .

Sa bijection réciproque s'appelle la fonction arc tangente, notée : **artan** elle est définie de  $\mathbb{R}$

vers  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ .

## La courbe de la fonction **artan** :



**Résultats :**

$$1) \begin{cases} \arctan(\tan x) = x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \end{cases}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$3) (\forall x \in \mathbb{R})(\tan(\arctan x) = x)$$

$$\text{et } \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \arctan(\tan x) = x$$

4) La fonction **artan** est continue et impaire strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

$$5) \arctan x = \arctan y \Leftrightarrow x = y \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\arctan x < \arctan y \Leftrightarrow x < y \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$7) (\forall x \in \mathbb{R}^+) (\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2) \\ \text{et } (\forall x \in \mathbb{R}^-) (\arctan x + \arctan(1/x) = -\pi/2) \\ \text{(Propriété à démontrer)}$$

**Exercice 24 :** Déterminer les réels suivants :

$$1) a = \text{Arctan} \left( \tan \left( \frac{2007\pi}{5} \right) \right)$$

$$2) b = \tan \left( \text{Arctan} \left( \frac{2007\pi}{5} \right) \right)$$

$$3) c = \tan(\text{Arctan}(-1))$$

$$4) d = \text{Arctan}(\tan(-1))$$

$$5) e = \tan(\text{Arctan}(\sqrt{123}))$$

**Solution :** 1) on a si  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ :$

$$\arctan(\tan x) = x$$

$$a = \text{Arctan} \left( \tan \left( \frac{2007\pi}{5} \right) \right)$$

$$= \text{Arctan} \left( \tan \left( 405\pi + \frac{2\pi}{5} \right) \right) = \text{Arctan} \left( \tan \left( \frac{2\pi}{5} \right) \right)$$

$$\text{Et puisque : } -\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \text{ alors : } a = \frac{2\pi}{5}$$

$$2) b = \tan \left( \text{Arctan} \left( \frac{2007\pi}{5} \right) \right) = \frac{2007\pi}{5}$$

$$\text{Car : } (\forall x \in \mathbb{R}) (\tan(\text{arctan } x) = x)$$

$$3) c = \tan(\text{Arctan}(-1)) = -1$$

$$4) d = \text{Arctan}(\tan(-1)) = -1 \text{ car } -\frac{\pi}{2} < -1 < \frac{\pi}{2}$$

$$5) e = \tan(\text{Arctan} \sqrt{123}) = \sqrt{123}$$

**Exercice 25 :** on considère les nombres

$$\text{suivants : } a = \text{Arctan} \frac{1}{2} \text{ et } b = \text{Arctan} \frac{1}{5}$$

$$\text{et } c = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan} \frac{1}{8}$$

1) montrer que :  $\tan(a+b) = \tan c$

2) En déduire que :

$$\text{Arctan} \frac{1}{2} + \text{Arctan} \frac{1}{5} + \text{Arctan} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Solution : 1) on a : } \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan \arctan \left( \frac{1}{2} \right) + \tan \arctan \left( \frac{1}{5} \right)}{1 - \tan \arctan \left( \frac{1}{2} \right) \times \tan \arctan \left( \frac{1}{5} \right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} = \frac{7}{9}$$

$$\tan c = \tan \left( \frac{\pi}{4} - \arctan \left( \frac{1}{8} \right) \right) = \frac{\tan \left( \frac{\pi}{4} \right) - \tan \arctan \left( \frac{1}{8} \right)}{1 + \tan \left( \frac{\pi}{4} \right) \times \tan \arctan \left( \frac{1}{8} \right)}$$

$$\tan c = \frac{1 - \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{7}{9} \quad \text{Donc : } \tan(a+b) = \tan c$$

$$2) 0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \arctan 0 < \arctan \frac{1}{2} < \arctan 1 \Rightarrow 0 < \arctan \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$0 < \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \arctan 0 < \arctan \frac{1}{5} < \arctan 1 \Rightarrow 0 < \arctan \frac{1}{5} < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc } 0 < a+b < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Et on a : } 0 < \frac{1}{8} < 1 \Rightarrow 0 < \arctan \frac{1}{8} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{8} < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc } 0 < c < \frac{\pi}{4}$$

On a :  $\tan(a+b) = \tan c$  et puisque  $\tan$  est une bijection de  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Donc :  $a+b=c$

$$\text{Cad : } \text{Arctan} \frac{1}{2} + \text{Arctan} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan} \frac{1}{8}$$

$$\text{Donc : } \text{Arctan} \frac{1}{2} + \text{Arctan} \frac{1}{5} + \text{Arctan} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

**Exercice 26 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{par : } f(x) = x \cos \frac{1}{x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1) Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

2) Etudier la continuité de  $f$  sur les intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$  et est ce  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{Solution : } 1) x \in \mathbb{R}^* \quad \left| \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right| \leq 1$$

$$\text{donc : } |x| \left| \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right| \leq |x| \quad \text{donc : } \left| x \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right| \leq |x|$$

$$\text{donc : } -|x| \leq f(x) \leq |x|$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Donc :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

2) on a la fonction :  $f_1 : x \rightarrow \frac{1}{x}$  continue sur les

intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$  et les fonctions :

$f_2 : x \rightarrow \cos x$  et  $f_3 : x \rightarrow x$  sont continués sur les

intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$

Donc :  $f = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$  est continue sur les

intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$

Et puisque :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

Alors  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } x \rightarrow \cos x \text{ est continue en } x_0 = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} = \cos 0 = 1$$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos \frac{1}{x} = +\infty$

**Exercice 27:** Considérons la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$ ; si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 2$

2) Etudier la continuité de  $f$  en  $x_1 = \sqrt{2}$

3) Etudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Solution :** 1) on va écrire  $f$  sur les intervalles

Bien définies :  $\begin{cases} f(x) = 1 + (x-1)^2; \text{ si } \dots x \in [1; 2[ \\ f(x) = 2 + (x-2)^2; \text{ si } \dots x \in [2; 3[ \end{cases}$

On a  $f(2) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 + (x-1)^2 = 2 = f(2)$$

donc  $f$  est continue à gauche de  $x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 + (x-2)^2 = 2 = f(2)$$

donc  $f$  est continue à droite de  $x_0 = 2$

et puisque  $f$  est continue à droite et à gauche de  $x_0 = 2$  alors  $f$  est continue en  $x_0 = 2$

2) Etudions la continuité de  $f$  en  $x_1 = \sqrt{2}$

Puisque les fonctions :  $g : x \rightarrow E(x)$  et  $h : x \rightarrow x$  sont continues en  $x_1 = \sqrt{2}$

alors :  $f = g + (h - g)^2$  est continue en  $x_1 = \sqrt{2}$

3) Etudions la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

Puisque les fonctions :  $g : x \rightarrow E(x)$  et  $h : x \rightarrow x$  sont continues sur chaque intervalle dans  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

Alors la fonction :  $f = g + (h - g)^2$  est continue sur chaque intervalle dans  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

3) Etudions la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{Z}$

Soit :  $k \in \mathbb{Z}$  on a  $f(k) = k$

$$\begin{cases} f(x) = k - 1 + (x - k + 1)^2; \text{ si } \dots x \in [k - 1; k[ \\ f(x) = k + (x - k)^2; \text{ si } \dots x \in [k; k + 1[ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} k - 1 + (x - k + 1)^2 = k = f(k)$$

donc  $f$  est continue à gauche de  $x_0 = k$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} k + (x - k)^2 = k = f(k)$$

donc  $f$  est continue à droite de  $x_0 = k$

et puisque  $f$  est continue à droite et à gauche de  $x_0 = k$  alors  $f$  est continue sur  $\mathbb{Z}$

conclusion :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 28 :** soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  tels que  $f$  est bornée et  $g$  continue sur  $\mathbb{R}$ ; Montrer que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$

**Solution :1)**  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  donc il existent deux réels  $m$  et  $M$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$\text{Donc : } f(x) \in [m; M] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } g(f(x)) \in g([m; M]) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et puisque  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  alors

$g$  est continue sur  $[m; M]$  donc il existent deux

réels  $a$  et  $b$  tel que  $g([m; M]) = [a; b]$

$$\text{donc } g(f(x)) \in [a; b] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{donc } a \leq g(f(x)) \leq b \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{donc } a \leq (g \circ f)(x) \leq b \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc  $g \circ f$  sont bornée sur  $\mathbb{R}$

2) la fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc :

$$g(\mathbb{R}) = I \text{ avec } I \text{ un intervalle de } \mathbb{R}$$

et puisque  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  Donc :

$$f(y) \in [m; M] \quad \forall y \in I$$

$$\text{Donc : } f(g(x)) \in [m; M] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } m \leq (f \circ g)(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc  $f \circ g$  sont bornée sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 29:** Considérons la fonction  $f$  continue Sur l'intervalle  $[a; b]$  et  $x_1$  et  $x_2$  et  $x_3$  des nombres de l'intervalle  $[a; b]$

Montrer que l'équation :

$3f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$  admet au moins une solution dans  $[a; b]$

**Solution :**

On considéré la fonction  $g$  définie sur  $[a; b]$  par

$$g(x) = 3f(x) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$$

la fonction  $g$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$

soit  $f(\alpha)$  le plus petit des nombres  $f(x_1); f(x_2)$

;  $f(x_3)$  et soit  $f(\beta)$  le plus grand des nombres

$f(x_1); f(x_2)$  et  $f(x_3)$

On a :  $g(\alpha) = 3f(\alpha) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$

$$g(\alpha) = (f(\alpha) - f(x_1)) + (f(\alpha) - f(x_2)) + (f(\alpha) - f(x_3))$$

Donc :  $g(\alpha) \leq 0$

De même : on a :  $g(\beta) = 3f(\beta) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$

$$g(\beta) = (f(\beta) - f(x_1)) + (f(\beta) - f(x_2)) + (f(\beta) - f(x_3))$$

Donc :  $g(\beta) \geq 0$

et puisque  $g$  est continue sur  $[a; b]$

Donc : d'après le **(T.V.I)** il existe un réel  $c$  dans  $[a; b]$  tel que :  $g(c) = 0$

$$\text{Cad } 3f(c) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$$

Donc l'équation  $3f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$

admet au moins une solution dans  $[a; b]$

**Exercice 30** : soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a; b]$  tels que :

$$0 < g(x) < f(x) \quad \forall x \in [a; b]$$

Montrer que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$$

**Solution** : Montrons que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x) \quad \text{Cad :}$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; \lambda \leq \frac{f(x)}{g(x)} - 1$$

On considère la fonction  $h$  définie sur  $[a; b]$  par

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \quad \text{la fonction } h \text{ est continue sur}$$

l'intervalle  $[a; b]$  car  $f$  et  $g$  sont continues sur

l'intervalle  $[a; b]$  et  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a; b]$  Donc la

fonction  $h$  admet un minimum  $\lambda$  Cad il existe

$x_0 \in [a; b]$  tel que :

$$\lambda = h(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - 1 \quad \text{et } \lambda \leq h(x) \quad \forall x \in [a; b]$$

On a :  $0 < g(x_0) < f(x_0)$  donc  $0 < \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - 1$

donc :  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  donc :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$$

**Exercice 31** : Considérons la fonction  $f$  continue

Sur l'intervalle  $[a; b]$  tel que :  $f(a) < 0$

il existe  $x_0 \in ]a; b[$  tel que :  $f(x_0) = \frac{a - x_0}{b - x_0}$

**Solution** :

$$\text{On a : } f(x_0) = \frac{a - x_0}{b - x_0} \Leftrightarrow (b - x_0)f(x_0) - (a - x_0) = 0$$

On considère la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = (b - x)f(x) - (a - x) \quad ; \text{ la fonction } g \text{ est}$$

continue sur l'intervalle  $[a; b]$  car c'est la somme de fonctions continues sur  $[a; b]$

On a :  $g(a) = (b - a)f(a) < 0$  car  $f(a) < 0$

Et  $b - a > 0$  et on a :  $g(b) = b - a > 0$

Donc : d'après le **(T.V.I)** il existe  $x_0 \in ]a; b[$  tel

$$\text{que : } g(x_0) = 0 \quad \text{cad } f(x_0) = \frac{a - x_0}{b - x_0}$$

**Exercice 32** : Soit la fonction  $f(x) = x^2 + x + 1$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1- Déterminer  $J = f([0; 1])$

2- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque de  $J$  vers  $[0; 1]$  et déterminer  $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

**Exercice 33** : Soit la fonction  $g(x) = x - 2\sqrt{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

1- Montrer que  $g$  est strictement croissante sur  $[1; +\infty[$  puis déterminer  $J = g([1; +\infty[)$

2- Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque de  $J$  vers  $[1; +\infty[$  et déterminer  $g^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

**Exercice 34** : Soit la fonction  $h(x) = \frac{x}{1 - x^2}$

Montrer que  $h$  est une bijection de  $] - 1; 1[$  vers un intervalle  $J$  qu'il faut déterminer et déterminer et déterminer  $h^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien*

