

SUITES NUMERIQUES

I) RAPPELLES

1) Suite arithmétique ; suite géométrique

1.1 Activité :

Activité :

Une personne a reçu deux offres de deux sociétés commerciales pour une durée de 4 ans.

La société $\mathcal{A}$ propose un salaire de 4500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 75 Dh chaque mois.

La société $\mathcal{B}$ propose un salaire de 3500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 3% chaque mois.

Soient a_n et b_n les salaires proposés respectivement par les sociétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ pour le n ème mois.

- 1- Calculer les salaires des 4 premiers mois pour les deux sociétés.
- 2- Trouver une relation entre a_{n+1} et a_n puis entre b_{n+1} et b_n .
- 3- Calculer les salaires du 10^{ème} mois pour les deux sociétés.
- 4- Quelle est la société la plus bénéfique pour la personne ?

Rappelle :

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$v_{n+1} = qv_n$
Terme général	$u_n = u_p + (n - p)r$	$v_n = v_p \times q^{n-p}$
Relation entre 3 termes consécutifs a, b et c	$2b = a + c$	$b^2 = ac$
Somme des termes consécutifs	$S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$ $= \frac{(n-p+1)}{2} [u_p + u_n]$	$S = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$ $= v_p \frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q} \quad (q \neq 1)$
Variations	(u_n) est croissantes ssi $r \geq 0$ (u_n) est décroissantes ssi $r \leq 0$	(v_n) est croissantes ssi $q \geq 1$ (v_n) est décroissantes ssi $0 < q \leq 1$ Si $q < 0$ alors (v_n) n'est pas monotone

Exercice :

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ (\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = 2u_n - 5) \end{cases} \quad (\text{La suite } (u_n)_n \text{ s'appelle une suite arithmético-géométrique})$$

1- Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n = u_n + \alpha)$

a- Déterminer α pour que la suite $(v_n)_n$ soit géométrique.

b- Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .

2- Calculer en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

2) Suites majorée, suites minorée ; Monotonie d'une suite.Définition (Rappelle) :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ **est majorée** s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \in \mathbb{I})(u_n \leq M)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ **est minorée** s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in \mathbb{I})(u_n \geq m)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ **est bornée** si elle est majorée et minorée.

Théorème :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ **est croissante** si et seulement si : $(\forall n \in \mathbb{I})(u_{n+1} \geq u_n)$
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ **est décroissante** si et seulement si : $(\forall n \in \mathbb{I})(u_{n+1} \leq u_n)$

Exercice 1 :

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n - 1}{2u_n + 3} \end{cases}$$

- 1- Montrer que $(u_n)_n$ est minorée par 1 et majorée par 3.
- 2- Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 2 :

Soit la suite récurrente $(v_n)_n$ définie par :
$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$$

- 1- Montrer que la suite $(v_n)_n$ est croissante.
- 2- Montrer que la suite $(v_n)_n$ est minorée par $\sqrt{2}$ et majorée par 2.

Exercice 3 :

Soit la suite récurrente $(w_n)_n$ définie par :
$$\begin{cases} w_0 = 2 \\ (\forall n \geq 1) \left(w_n = \sqrt[n]{w_{n-1}^{n-1} + 2} \right) \end{cases}$$

- 1- Calculer w_1 ; w_2 et w_3
- 2- Soit la suite $(v_n)_n$ définie par ; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(v_n = w_n^n)$
 - a- Déterminer la nature de la suite $(v_n)_n$
 - c- Déterminer v_n puis w_n en fonction de n .

II) LIMITE D'UNE SUITE1) Activité

Fractale.exe

Activité :

- 1- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}^+)(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
- 2- Soit $[AB]$ un segment de longueur $l_0 = 1$; On procède comme suite : dans l'étape 1 on découpe le segment $[AB]$ en 3 parties égales et on ajoute une quatrième de même longueur.
Dans l'étape 2 on fait la même chose qu'on a fait au segment $[AB]$ au 4 segments obtenus à l'étape 1. ainsi de suite

a) Quelle est le nombre de segments dans l'étape n

b) Quelle est la longueur de la ligne brisée dans l'étape n

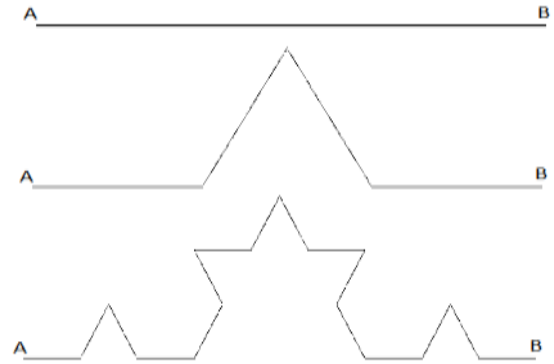
3- déterminer un entier n pour la quelle $l_n > 1000$

4- Soit A un réel quelconque positif ; Montrer qu'il existe N_0 tel que si $n \geq N_0$ alors $l_n \geq A$

On peut dire : « **On peut rendre l_n aussi grande qu'on veut** »

Ceci se traduit mathématiquement par : $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = +\infty$

La ligne brisée "limite" s'appelle une fractal.



2) Définitions

Définition 1 :

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (quand n tend vers $+\infty$) si elle vérifie la proposition suivante : $(\forall A > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow u_n > A)$ on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Remarque : L'expression « quand n tend vers $+\infty$ » est superflu car l'étude de la limite d'une suite c'est toujours quand n tend vers $+\infty$ et on se contente d'écrire : $\lim u_n = +\infty$

Propriété : (limites de référence)

Les suites $(n)_n ; (n^2)_n ; (n^k)_n (k \in \mathbb{N}^*) ; (\sqrt{n})_n , (\sqrt[p]{n})_n (p \in \mathbb{N}^*)$ tendent vers $+\infty$

Exercice : Montrer le dernier résultat

Définition 2 :

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ (quand n tend vers $+\infty$) si elle vérifie la proposition suivante : $(\forall A > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow u_n < -A)$ on écrit $\lim u_n = -\infty$

Remarque : $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$

Définition 3 :

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique et l un nombre réel. On dit que la suite $(u_n)_n$ tend vers l si elle vérifie la proposition suivante : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$ on écrit $\lim u_n = l$

Définition 4 :

Une suite qui tend vers une limite finie l s'appelle une suite **convergente**.
une suite qui n'est pas convergente est une suite **divergente**.

Théorème :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est divergente

Exemple : (Exercice déjà corrigé)

Soit la suite récurrente $(v_n)_n$ définie par :
$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$$

La suite $(v_n)_n$ est croissante.

La suite $(v_n)_n$ est majorée par 2. donc elle est convergente.



Remarque :

Une suite peut être convergente sans qu'elle est monotone

$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas monotone mais elle est convergente.

Remarque :

Suite divergente veut dire que la suite n'a pas de limite finie c'est-à-dire que la suite n'a pas de limite ou elle a une suite infinie.

Exemples :

- les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_n$; $\left(\frac{1}{n^2}\right)_n$; $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)_n$ sont des suites convergentes
- Les suites $(n)_n$; $(-n^2)_n$; $(n^k)_n$; $((-1)^n)_n$; $(\cos n)_n$ sont divergentes

Théorème :

Si une suite $(u_n)_n$ admet une limite finie l cette limite est **unique**

Preuve : (En exercice)

Utiliser la définition et la propriété : $|a + b| \leq |a| + |b|$

3) Opération sur les limites des suites.**1) Limite de la somme**

$\lim u_n$	l	l		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Formes indéterminées

2) Limites des produits

$\lim u_n$	l	$l > 0$ ou $+\infty$		$l < 0$ ou $-\infty$		$\pm\infty$
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim(u_n \times v_n)$	$l \cdot l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Formes indéterminées

3) Limites des inverses

$\lim u_n$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim\left(\frac{1}{u_n}\right)_n$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

3) Limites des quotients

$\lim u_n$	l	$l > 0$ ou $+\infty$		$l < 0$ ou $-\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Formes indéterminées	Formes indéterminées

Propriété :

$$\lim |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = 0$$

4) Les techniques de calculs des limites**Théorème 1:**

Si la suite $(u_n)_n$ est définie d'une façon explicite $u_n = f(n)$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercices :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim \left(\frac{2n^2 + n}{\sqrt[3]{n^5 + n^2}} \right)$

2. $\lim \left(n \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{n} \right) \right)$
3. $\lim \left(\sqrt[4]{n^3 + n^2} - \sqrt{n+1} \right)$

Théorème 2 :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques tels que : $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n) \\ \lim v_n = +\infty \end{cases}$

On a alors : $\lim u_n = +\infty$.

Preuve : (On utilise la définition des limites)

Propriété 1 : (l'inégalité de Bernoulli)

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}^+)(1+x)^n \geq 1+nx$$

Corolaire :

- Si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim q^n = 0$
- Si $q \leq -1$ la suite $(q^n)_n$ est divergente.

Preuve :

1. Pour $q > 1$: On pose $q = 1+x$ où $x > 0$ et donc $q^n = (1+x)^n \geq 1+nx$ et comme $\lim 1+nx = +\infty$ alors d'après le théorème précédent : $\lim q^n = +\infty$
2. Pour $-1 < q < 1$
 - a) Pour $q = 0$ on a : $\lim 0^n = 0$
 - b) On suppose que $q \neq 0$ on a : $\left| \frac{1}{q} \right| > 1$ et par suite : $\lim \left| \frac{1}{q} \right|^n = \lim \frac{1}{|q|^n} = +\infty$
d'où et d'après les opérations sur les limites on a : $\lim |q|^n = 0$ donc $\lim q^n = 0$

Exercices :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim \left(-\frac{4}{7} \right)^n$
2. $\lim \left(\frac{2^n - 3^n}{3^n - 5^n} \right)$
3. $\lim \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k$

5) Les limites et l'ordre :**Théorème :**

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques. On a les assertions suivantes :

- ① Si $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(0 \leq u_n) \\ \lim u_n = l \end{cases}$ alors $l \geq 0$
- ② Si $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(a \leq u_n) \\ \lim u_n = l \end{cases}$ alors $l \geq a$
- ③ Si $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(0 \leq u_n \leq b) \\ \lim u_n = l \end{cases}$ alors $a \leq l \leq b$
- ④ Si $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n) \\ \lim u_n = l \text{ et } \lim v_n = l' \end{cases}$ alors $l' \leq l$

6) Les critères de convergences.

6.1 Critères fondamentaux :

Critère 1 :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et l un réel.

$$\text{Si } \begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(|u_n - l| \leq v_n) \\ \lim v_n = 0 \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim u_n = l$$

Critère 2 :

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites numériques et l un réel.

$$\text{Si } \begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(w_n \leq u_n \leq v_n) \\ \lim v_n = \lim w_n = l \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim u_n = l$$

Critère 3 :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et l un réel.

$$\text{Si } \begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n) \\ \lim v_n = +\infty \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim u_n = +\infty$$

Critère 4 :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et l un réel.

$$\text{Si } \begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \leq v_n) \\ \lim v_n = -\infty \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim u_n = -\infty$$

Preuve :

En utilisant la définition des limites montrer l'un des 4 critères.

Exercice :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin(n)}{n+1}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n^2+k} \right)$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n+k}} \right)$

6.2 Suite de la forme : $v_n = f(u_n)$

Critère 5 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; et $(u_n)_n$ une suite numérique telle que :

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \in I)$$

$$\text{Si } \begin{cases} \lim u_n = l \\ f \text{ continue en } l \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim f(u_n) = f(l)$$

Exercice :

Déterminer :

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan \left(n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)$

$$2. \lim \sqrt[3]{n \arctan\left(\frac{8}{n}\right)}$$

6.3 Suite de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$

Activité :

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

- Déterminer le point d'intersection de C_f avec la droite $(\Delta) y = x$
- Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
 - Poser sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite $(u_n)_n$
 - Conjecturer la monotonie de la suite $(u_n)_n$ et sa limite potentielle.
- Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante majorée par 2.
- Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n = u_n + \alpha)$
 - Déterminer α pour que la suite $(v_n)_n$ soit géométrique.
 - Déterminer v_n puis u_n en fonction de n
 - Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

Critère 6 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; et $(u_n)_n$ une suite numérique telle que :

Si :

- d) f est continue sur I
- e) $f(I) \subset I$
- f) $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$
- g) $u_0 \in I$ (donc $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I)$)
- h) $(u_n)_n$ est convergente

Alors la suite $(u_n)_n$ tend vers l solution de l'équation $f(x) = x$

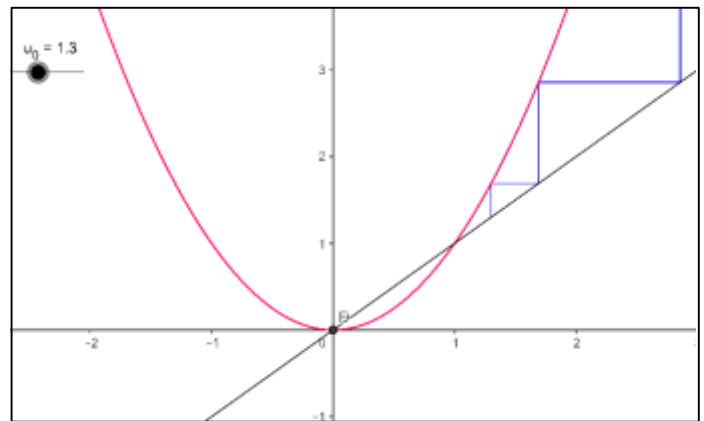
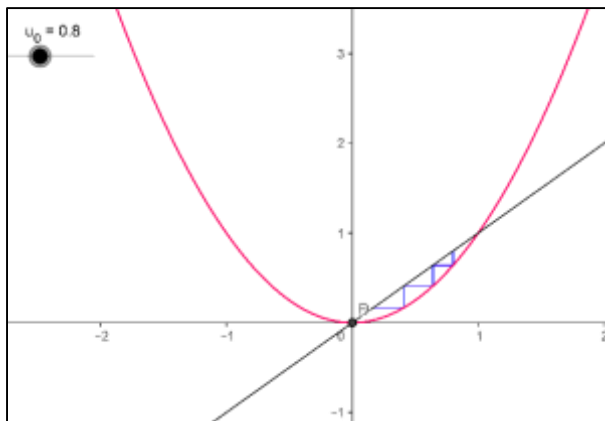
Remarque :

1- Par fois l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solution ; Dans ce cas prenez celle qui est dans I .

S'il y a plusieurs solutions de l'équation $f(x) = x$; utiliser la monotonie de (u_n)

2- La fonction f et la suite $(u_n)_n$ n'ont pas nécessairement la même monotonie :

Pour la même fonction $f: x \mapsto x^2$ si on considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0.8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ elle sera décroissante convergente (Prouver le) ; mais si on considère la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 1.3 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$ elle sera croissante divergente.



Exercices d'applications

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$

1. Etudier les variations de f et déterminer $f([0,2])$
2. a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I = [0,2])$
 b) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
 c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$.

Critère 8 :

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$
- Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$

Preuve :

On suppose que la suite $(u_n)_n$ est croissante non majorée et montrons : (P) $(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow u_n > A)$

Soit $A > 0$ puisque $(u_n)_n$ est non majorée alors il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$

et puisque $(u_n)_n$ est croissante alors si $n > n_0$ alors $u_n > u_{n_0} > A$

donc il existe N ($N = n_0$) qui vérifie la propriété (P)

D'où la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$

Exercice

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où $f(x) = x^2 + x + 1$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est non majorée (Par absurde) .
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

Propriété :

Toute suite convergente est bornée

Remarque : La réciproque n'est pas vraie : $u_n = (-1)^n$ est bornée mais pas convergente.

6.4 Les suites adjacentes :**Activité :**

Soit les suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n > u_n)$
3. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes et ont la même limite.

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont appelées : **Suites adjacentes**.

Définition :

On dit que deux suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont **adjacentes** si :

- L'une est croissante l'autre est décroissante.
- $\lim(u_n - v_n) = 0$

Propriété :

Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites **adjacentes** et $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ est décroissante alors $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq v_n)$

Preuve :

Par hypothèse on a : $(u_n)_n$ est croissante donc $u_n \leq u_{n+1}$

$(v_n)_n$ est décroissante donc $v_{n+1} \leq v_n$

Par suite : $(u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n) \leq (u_n - v_n) - (u_n - v_n) = 0$

D'où la suite $(u_n - v_n)_n$ est décroissante et tend vers 0 donc elle est de termes positifs et finalement

$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq v_n)$

Exercice :

Considérons les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a & v_0 = b & 0 < a < b < 2a \\ u_n v_n = ab & v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(0 < u_n < v_n)$
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante
3. a) Montrer $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n) \right)$
 b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$
 c) Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes
4. Déterminer les limites des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.