FONCTIONS LOGARITHMIQUES

I) LA FONCTION LOGARITHME NEPERIENNE

1) Existence :

Activité :

Le but de cette activité est de montrer l'existence d'une fonction f non nulle telle que :

$$(\Sigma)\begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\ (1) \\ (\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{*2})\big(f(x.y)=f(x)+f(y)\big)(2)\end{cases}$$

1- Déterminons $f(1)$:

D'après (2) on prenant $x=y=1$ on obtient : $f(1)=2f(1)$ donc $f(1)=0$.

2- Déterminons l'existence d'un réel k tel que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\left(f'(x)=\frac{k}{x}\right)$.

Pour tous x et y dans $]0,+\infty[$ on pose :

$g_x(y)=f(xy)$ et $h_x(y)=f(x)+f(y)$; on a : g_x et h_x sont dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$(\forall y\in]0,+\infty[)(g'_x(y)=xf'(xy)$ et $h'_x(y)=f'(y))$ ($f(x)$ es une constante pour y)

et puis que : $(\forall y\in]0,+\infty[)(g'_x(y)=\ h'_x(y))$ alors :

$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{*2})(xf'(xy)=f'(y))$ pour $y=1$ on trouve : $(\forall x\in]0,+\infty[)\left(f'(x)=\frac{f'(1)}{x}\right)$

Donc la fonction qui vérifie la condition (Σ) est la fonction primitive de la fonction $\frac{f'(1)}{x}$ et qui s'annule en 1

Inversement :

Considérons la fonction primitive de $x\mapsto\frac{k}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1 ; montrons que f vérifie (Σ)

On a : f est dérivable $]0,+\infty[$ (Définition de la fonction primitive)

Considérons les fonctions : $u_y(x)=f(xy)$ et $v_y(x)=f(x)+f(y)$ on a u_y et v_y sont dérivable sur $]0,+\infty[$:

$\forall x>0;\forall y>0 : u'_y(x)=yf'(xy)$ et $v'_y(x)=f'(x)$ et on a :

$u'_y(x)=yf'(xy)=y\times\frac{k}{xy}=\frac{k}{x}=f'(x)=v'_y(x)$ donc :

$\forall x>0;\forall y>0\ \ v_y(x)=u_y(x)+c$

Pour $x=y=1$ on aura : $v(1)=u(1)+c$ et puisque $u(1)=v(1)$ alors $c=0$. d'où :

$\forall x>0;\forall y>0\ \ v_y(x)=u_y(x)$ c-à-dire $\forall x>0;\forall y>0$ on a : $f(xy)=f(x)+f(y)$.

Propriété :

Les fonctions non nulles qui vérifient (Σ) sont les fonctions primitive de la fonction $x\mapsto\frac{k}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annulent en 1.

2) Fonction logarithme Népérienne

2.1 Définition et propriétés algébrique :

Définition :

La fonction **logarithme népérienne** est la fonction primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1 ; on la note par ln.

Conséquences immédiates :

- ln est définie sur $]0,+\infty[$
- $f(x) = ln(u(x))$ est définie si et seulement si $u(x) > 0$
- $ln(1) = 0$
- ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(x \in]0,+\infty[)\left(ln'(x) = \frac{1}{x}\right)$.

Monotonie :

On a : $(x \in]0,+\infty[)\left(ln'(x) = \frac{1}{x} > 0\right)$ donc la fonction ln est **strictement croissante sur** $]0,+\infty[$

- $ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $ln(a) \leq ln(b) \Leftrightarrow a \leq b$

Applications :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

❶ L'équation : $ln(x^2 - 1) = ln(2 - x)$

❷ L'inéquation : $ln(x^2 - 1) \leq ln(2 - x)$.

La propriété caractéristique :

$$(\forall x > 0; \forall y > 0)(ln(x \times y) = ln(x) + ln(y))$$

Règles de calculs :

- $(\forall x > 0)\left(ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x)\right)$
- $(\forall x > 0; \forall y > 0)\left(ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)\right)$
- $(\forall x > 0; \forall r \in \mathbb{Q})(ln(x^r) = r\, ln(x))$

Preuve :(En exercice)

Exercice : On pose $\alpha = ln(2)$ et $\beta = ln(3)$

Calculer en fonction de α et β les réels suivants : $a = \sqrt[7]{32}$; $b = \frac{\sqrt[3]{24}}{9\sqrt{8}}$

2.2 Etude et représentation :

D'après la définition de la fonction ln on peut conclure que :

ln est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $]0,+\infty[$

✓ **Déterminons** $\lim_{x \to +\infty} lnx$.

Soit A un réel strictement positif. Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que $ln\,(1) = 0$ alors : $ln\,(2)$ est un réel strictement positif.

Par conséquent, le quotient : $\frac{A}{ln2}$ est un réel strictement positif.

On appelle n le plus petit entier naturel tel que : $n \geq \frac{A}{ln2}$ (il suffit de prendre $n = E\left(\frac{A}{ln2}\right) + 1$)

On multiplie par $ln\ 2$ qui est positif on aura : $n\ ln2 \geq A \Leftrightarrow ln(2^n) \geq A$

Comme ln est une fonction croissante, alors pour tout x tel que $x \geq 2^n$ nous avons : $lnx \geq ln2^n \geq A$

Donc $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(x \geq B \Rightarrow lnx > A)$: $(B = ln2^n$ où $= E\left(\frac{A}{ln2}\right) + 1\ )$ Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty}$$

✓ **Déterminons $\lim_{x\to 0^+} lnx$.**

On a : On pose $t = \frac{1}{x}$ on a : $x = \frac{1}{t}$ et $x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to +\infty$ donc :

$\lim_{x\to 0^+} lnx = \lim_{t\to+\infty} ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to+\infty} -lnt = -\infty$ finalement : $\boxed{\lim_{x\to 0^+} lnx = -\infty}$

La droite $(\Delta): x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe C_{ln}

✓ **Déterminons $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x}$**

Exercice :

1- En utilisant le T.A.F de la fonction ln sur l'intervalle $[1, \sqrt{x}]$; montrer que : $0 < \frac{lnx}{x} < \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$.

2- En déduire que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

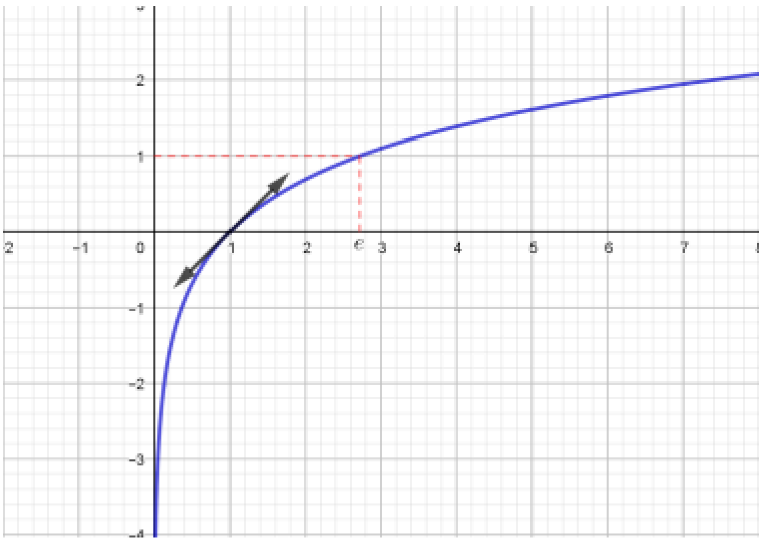
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0}$$

La courbe C_{ln} admet une branche parabolique vers l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

✓ Le nombre e :

La fonction ln est continue strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$, donc le réel 1 a un antécédent noté e (le nombre népérien) $ln(e) = 1$

✓ La courbe C_{ln} a une tangente en $A(1,0)$ $(T): y = x - 1$



x	0	1	e	$+\infty$
$ln'x$			$+$	
lnx	$-\infty$	0	1	$+\infty$

3) Dérivée de la fonction $x \to \ln(u(x))$

D'après le théorème de la dérivée de la composition de deux fonctions on peut citer le théorème suivant :

Théorème :

Si u est une fonction dérivable sur I et **strictement positive sur I** alors la fonction $f(x) = ln(u(x))$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I)$ $\left(f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

Exercice :

Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction : $f(x) = ln\left(\frac{x^2+2x-3}{1+\sqrt{x^2-1}}\right)$

Corolaire :

Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors la fonction $f(x) = ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I)$ $\left(f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

Preuve : (en exercice)

Etudier deux cas $u(x) > 0$ sur I et $u(x) < 0$ sur I.

Propriété :

Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors les fonctions primitives de la fonction $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions $F(x) = l\,n(|u(x)|) + C^{te}$

Applications :

Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{7x+3}{2x^2+5}$

$g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ (Essayer d'écrire $g(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$ où a et b des réels à déterminer).

$h(x) = \frac{7}{2x^2+x-3}$

$k(x) = tanx$

$u(x) = \frac{1}{xlnx}$

$v(x) = \frac{x^3+2x^2-3x+2}{x-3}$

$t(x) = \frac{1}{sin2x}$

4) Limites référentielles :

Propriété :

① $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx = -\infty$	② $\lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty$	③ $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)
④ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\, lnx = 0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)	⑤ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$	⑥ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$

Preuves :

③ $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x^n} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{n-1}}\left(\frac{lnx}{x}\right) = 0$ (car $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{lnx}{x}\right) = 0$ voir exercice précèdent)

④ on pose $t = \frac{1}{x}$ $\quad x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} x^n\, lnx = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{t^n} ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to +\infty} \frac{-lnt}{t^n} = 0$$

⑤ La fonction ln étant dérivable en 1 alors : $\lim_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{lnx-ln1}{x-1}=ln'(1)=1$ $\quad (ln'(x)=\frac{1}{x}$ pour tout $x>0)$

⑥ On pose : $t=x+1$ et on applique⑤.

Exercices :

Déterminer les limites suivantes :

❶ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{3x^2+x}$ ❷ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x^2+x+1)}{\ln(5x+1)}$ ❸ $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(2x^2-5x+3)}{\ln(5x-9)}$

❹ $\lim_{x\to -3}\frac{\ln(x+4)}{\ln(x^2+3x+2)}$ ❺ $\lim_{x\to 1^+}(4x^2-2x-2)\ln(1-x)$ ❻ $\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x^2}\ln(x+\sqrt{x})$

❼ $\lim_{x\to +\infty}\ln(2x^2+x)-\frac{1}{3}\ln(x^6+3x^4)$ ❽ $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(3x^4+x+1)}{\ln(x+1)}$ ❾ $\lim_{x\to +\infty}\frac{ln\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$

II) FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE a

1) Définition

Définition :

Soit a un réel non nul et différents de 1. La fonction notée par Log_a définie sur $]0,+\infty[$ par :

$(\forall x\in]0,+\infty[)\left(Log_a(x)=\frac{lnx}{lna}\right)$ S'appelle **: la fonction logarithmique de base a**

Exemple :

Pour : $a=e$ on aura : $Log_e(x)=\frac{lnx}{lne}=lnx$

2) Propriétés et règles de calcul :

Propriété caractéristique

Toutes les propriétés de calcul qu'on a vu concernant la fonction ln restent valables pour la fonction Log_a.

- $(\forall x>0)(\forall y>0)(Log_a(xy)=Log_a(x)+Log_a(y))$
- $(\forall x>0)\left(Log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-Log_a(x)\right)$
- $(\forall x>0)(\forall y>0)\left(Log_a\left(\frac{x}{y}\right)=Log_a(x)-Log_a(y)\right)$
- $(\forall x>0)(\forall r\in\mathbb{Q})(Log_a(x^r)=rLog_a(x)$

Pour démontrer les propriétés précédentes il suffit d'utiliser la définition de la fonction Log_a et les propriétés de la fonction ln

Propriétés :

- La fonction Log_a est une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$
- $(\forall x>0)(\forall y>0)(Log_a(x)=Log_a(y)\Leftrightarrow x=y)$
- $(\forall x>0)(\forall r\in\mathbb{Q})(Log_a(x)=r\Leftrightarrow x=a^r)$

Propriété :

La fonction Log_a est continue dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(\forall x\in]0,+\infty[)\ \left(Log_a'(x)=\frac{1}{x\,lna}\right)$

Preuve : (En exercice)

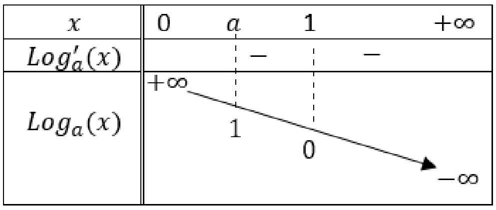
Etude et représentation de Log_a

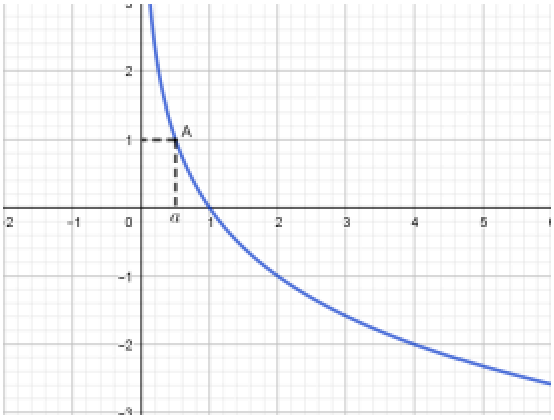
Soit a un réel strictement positif et différent de 1 :

- La fonction Log_a est définie sur $]0,+\infty[$.
- La fonction Log_a est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \left(Log'_a(x) = \frac{1}{x\,lna}\right)$ donc le signe de Log'_a dépend du signe de lna, ce qui nous amène à discuter deux cas : $lna > 0$; $lna < 0$

Si $a \in]0,1[$ alors $lna < 0$

Et donc : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \left(Log'_a(x) = \frac{1}{x\,lna} < 0\right)$.

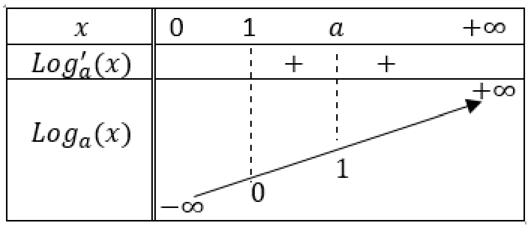


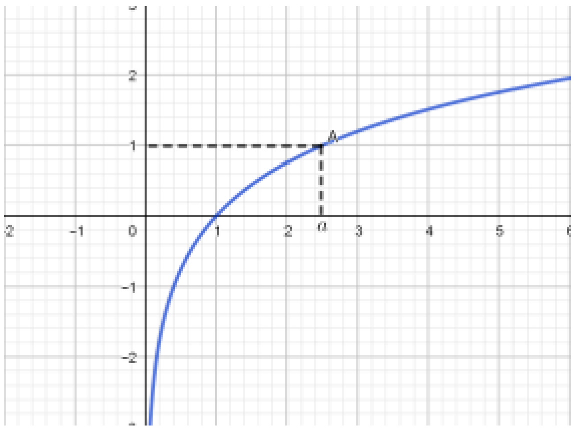


Courbe de la fonction $Log_{\left(\frac{1}{2}\right)}$

Si $a \in]1,+\infty[$ alors $lna > 0$

Et donc : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \left(Log'_a(x) = \frac{1}{x\,lna} > 0\right)$.





Courbe de la fonction $Log_{\left(\frac{5}{2}\right)}$

3) Cas particulier $a = 10$; logarithme décimal :

Définition :

La fonction logarithmique de base 10 s'appelle **la fonction logarithmique décimal** et se note par $\boldsymbol{log}$

$$(\forall x \in]0,+\infty[)\ \left(\boldsymbol{logx = \frac{lnx}{ln10}}\right)$$

Propriétés :

- $log(10) = 1$
- $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r)$
- $(\forall r \in \mathbb{Q})(log(10^r) = r$
- $log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$
- $log(x) \leq r \Leftrightarrow 0 < x \leq 10^r$

4) Applications

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Log_x(x+1) = Log_{x+1}(x)$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $Log_2(x) > Log_x(2)$

Exercice 4 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2. Résoudre l'équation $f(x) = 1$
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 1$
4. Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche de e
5. Etudier les variations de f et en deduire que f est une bijection de D_f vers un intervalle J.
6. Construire dans le même repère C_f et $C_{f^{-1}}$.

Exercice 5 : Considérons la fonction g définie par : $g(x) = xln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g
2. a)Montrer que la fonction g admet un prolongement par continuité en 0 noté $\bar{g}$
   b) Etudier la dérivabilité de $\bar{g}$ en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en -1 à gauche.
4. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g puis dresser le tableau de variation de g
5. Etudier les branches infinies de la courbe C_g.
6. Construire la courbe C_g