

NOMBRES COMPLEXES

Partie 2

I) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE NON NUL.

1) Notation et conséquence :

1.1 Notation

Définition :

Soit θ un réel ; on pose : $\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$
 Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul, on a : $z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$
 Cette écriture s'appelle **la forme exponentielle du complexe non nul z**

1.2 Conséquence de la notation :

Tous les résultats qu'on a vus au paravent concernant les modules et les arguments des nombres complexes non nuls on peut les rapporter en utilisant la notation exponentielle.

Propriété :

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls, on a :

- $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$
- $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'} e^{-i\theta'}$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$
- $\bar{z} = re^{-i\theta}$
- $-z = re^{i(\pi+\theta)}$

1.3 Formule de Moivre

Propriété :

Pour tout réel θ on a : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ d'où : $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

Soit $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ un nombre complexe non nul et son conjugué $\bar{z} = (\cos\theta - i \sin\theta) = e^{-i\theta}$

En faisant la somme membre à membre on obtient : $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$; puis en faisant la différence membre à membre on obtient : $2i \sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$

1.4 Formule d'Euler

Propriété :

Pour tout réel θ on a : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Application :

Linéarisation de $\cos^4 x$

On a $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \cos^4 x &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{i4\theta} + 3e^{i3\theta}e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta}e^{-i2\theta} + 3e^{i\theta}e^{-i3\theta} + e^{-i4\theta}) \\ &= \frac{1}{16} (e^{i4\theta} + 3e^{i2\theta} + 6 + 3e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}}{2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} \right) + \frac{6}{16} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cos(4\theta) + \frac{3}{8} \cos(2\theta) \end{aligned}$$

1
 1 1
 1 2 1
 1 3 3 1
 1 4 6 4 1
 1 5 10 10 5 1
 triangle de Pascal

Exercice :Linéariser $\sin^4 x$ **Exercice :**Montrer que $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2) \left(e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left[e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \right] \right)$

Cette égalité nous permet de déterminer la forme géométrique de la somme de deux complexes de même module

Exemple :

$$u = 3e^{i\frac{\pi}{5}} \text{ et } v = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } u + v &= 3e^{i\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{14}\right)} \left[e^{i\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{14}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{14}\right)} \right] \\ &= 3e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)} \left[e^{i\left(\frac{\pi}{35}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{35}\right)} \right] \\ &= 6\cos\left(\frac{\pi}{35}\right) e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)} \quad \text{et puisque } 6\cos\left(\frac{\pi}{35}\right) > 0 \text{ alors} \end{aligned}$$

$$|u + v| = 6\cos\left(\frac{\pi}{35}\right) \text{ et } \arg(u + v) \equiv \frac{6\pi}{35} \quad [2\pi]$$

Exercice

Déterminer le module et l'argument des complexes :

1. $z_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{5}}$
2. $z_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{5}}$
3. $z_3 = i + e^{i\frac{\pi}{5}}$
4. $z_4 = i - e^{i\frac{\pi}{5}}$

II) LES EQUATION DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{C}$:**1) Les racines carrées d'un complexe :****Définition :**On appelle racine carrée d'un complexe Δ tout complexe δ qui vérifie : $\delta^2 = \Delta$.**Propriété :**

Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposés.

Preuve :Soit $z = a + ib$ un complexe non nul

- 1^{er} cas : $b = 0$ et $a > 0$
 $\Delta = a = (\sqrt{a})^2$ donc $\delta_1 = \sqrt{a}$ et $\delta_2 = -\sqrt{a}$ sont les racines carrées de Δ
- 2^{ème} cas : $b = 0$ et $a < 0$
 $\Delta = a = -(-a) = (i\sqrt{-a})^2$ donc $\delta_1 = i\sqrt{-a}$ et $\delta_2 = -i\sqrt{-a}$ sont les racines carrées de Δ
- 3^{ème} cas : $a = 0$ donc $b > 0$

$$\text{On sait que : } (1 + i)^2 = 2i \text{ donc } \Delta = bi = \frac{b}{2}(1 + i)^2$$

$$\text{Et comme } b > 0 \text{ alors } \Delta = \left(\sqrt{\frac{b}{2}} (1 + i) \right)^2$$

$$\text{et par suite les racines de } \Delta \text{ sont } \delta_1 = \sqrt{\frac{b}{2}} (1 + i) \text{ et } \delta_2 = -\delta_1$$

- 4^{ème} cas : $a = 0$ donc $b < 0$

$$\text{On sait que : } (1 - i)^2 = -2i \text{ donc } \Delta = -b(-i) = \frac{-b}{2}(1 - i)^2$$

$$\text{Et comme } -b > 0 \text{ alors } \Delta = \left(\sqrt{\frac{-b}{2}} (1 - i) \right)^2$$

$$\text{et par suite les racines de } \Delta \text{ sont } \delta_1 = \sqrt{\frac{-b}{2}} (1 - i) \text{ et } \delta_2 = -\delta_1$$

- 5^{ème} cas : $a \neq 0$ et $b \neq 0$

On pose $\delta = x + iy$ une racine de Δ donc $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = \Delta$ $|\delta^2| = |\Delta|$ et par suite :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\Delta) = a \\ 2xy = \operatorname{Im}(\Delta) = b \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ \operatorname{Sig}(xy) = \operatorname{Sig}(b) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} x = \pm \alpha \\ y = \pm \beta \\ \operatorname{Sig}(xy) = \operatorname{Sig}(b) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ \beta = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \end{cases}$$

- Si $b > 0$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\alpha \\ y = -\beta \end{cases}$$

$\delta_1 = \alpha + i\beta$ et $\delta_2 = -\alpha - i\beta$ sont les racines carrées du complexe Δ

- Si $b < 0$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\beta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \beta \end{cases}$$

$\delta_1 = \alpha - i\beta$ et $\delta_2 = -\alpha + i\beta$ sont les racines carrées du complexe Δ

Exemple :

On va déterminer les racines carrées du complexe $\Delta = 2 + 3i$

Soit $\delta = x + iy$ une racine carrée de Δ on a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{13} \\ 2xy = 3 \end{cases} \quad \text{par suite :} \quad \begin{cases} 2x^2 = 2 + \sqrt{13} \\ 2y^2 = -2 + \sqrt{13} \\ 2xy = 3 > 0 \end{cases} \quad \text{et on aura} \quad \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{2}} \\ x = \pm \sqrt{\frac{-2 + \sqrt{13}}{2}} \\ xy > 0 \end{cases}$$

Donc les racines de $\Delta = 2 + 3i$ sont :

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{2}} + i \sqrt{\frac{-2 + \sqrt{13}}{2}} \quad \text{et} \quad \delta_2 = -\delta_1$$

Exercice :

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -12$
- $z_2 = \cos \alpha - 2$
- $z_3 = 4 - 2i$
- $z_4 = -4 - 3i$

Remarque :

Dans certain cas on peut déterminer les racines carrées du complexe Δ sans passer par la procédure précédente :

- Si $\Delta = re^{i\theta}$ alors les racines carrées de Δ sont $\delta_1 = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\delta_2 = -\delta_1$
- Si on remarque une identité remarquable par exemple $\Delta = -8 + 6i$ on a $6i = 2 \times 1 \times 3i$

$$\text{et } 1^2 + (3i)^2 = -8 \text{ donc } \Delta = -8 + 6i = 1^2 + 2.1.3i + (3i)^2 = (1 + 3i)^2$$

donc les racines carrées de Δ sont : $\delta_1 = 1 + 3i$ et $\delta_2 = -\delta_1$

2) Les équations de second degré

Considérons l'équation $P(z) = az^2 + bz + c = 0$ (E) où a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$

On a :

$$\begin{aligned} P(z) &= a \left(z^2 + \frac{b}{a}z \right) + c \\ &= a \left(z^2 + 2 \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c \\ &= a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta = 0$ l'équation (E) admet racine double : $z_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta \neq 0$; soit δ l'un des deux racines carrées de Δ , on aura :

$$\begin{aligned} P(z) &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right] \\ &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) \right] \end{aligned}$$

Donc l'équation $P(z) = 0$ aura deux solutions : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$

Propriété :

Considérons dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (E) où a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant on a :

Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet comme solution le complexe $z_0 = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta \neq 0$ l'équation (E) admet comme solution les complexes $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ une racine carrée de Δ

Exercices :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- ❶ $z^2 + 2z + 5 = 0$
- ❷ $2z^2 + 3iz + (1 - i) = 0$
- ❸ $3iz^2 + (1 - 2i)z + 5i + 1 = 0$

Remarque :

Si les coefficients a, b et c sont des réels et $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux racines complexes

conjugué $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Propriété :

Si l'équation (E) admet deux racines distinctes z_1 et z_2 alors $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Exercice :

Soit $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = 0$

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet un imaginaire pur comme racine.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

III) LES RACINES N-ÈME D'UN COMPLEXE NON NUL

1) Les racines n-ème de l'unité :

Définition :

On appelle **racine n-ème de l'unité** tout complexe u qui vérifie : $u^n = 1$
Autrement dit ; les racines n-ème de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n - 1 = 0$

Exemples :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1
- Les racines cubiques de l'unité sont : 1, j et j^2 où $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$

Preuve (d'une propriété)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons l'équation : $z^n = 1$

$u = 0$ n'est pas une racine de l'équation précédente. On pose $u = e^{i\alpha}$ (à remarquer que si u est une racine ; $|u| = 1$)

On a donc :

$$\begin{aligned} u^n = 1 &\Leftrightarrow [1, \alpha]^n = [1, 0] \\ &\Leftrightarrow n\alpha = 0 \quad [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{n} \quad (\text{où } k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Donc les racines n-ème de l'unité sont les complexes $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$

Propriété :

L'unité admet n racines n-ème qui s'écrivent de la forme : $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$

Exemple :

Les racines 4^{ème} de l'unité sont : $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}}$ où $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

- $u_0 = e^{i\frac{0}{4}} = 1$
- $u_1 = e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $u_2 = e^{i\frac{4\pi}{4}} = e^{i\pi} = -1$
- $u_3 = e^{i\frac{6\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

Exercice :

Ecrire sous les formes algébriques les racines 6^{ème} de l'unité.

Exercice :

Considérons l'équation : $(E) : z^6 = \bar{z}$.

1- Montrer que si $z \neq 0$ et z solution de (E) alors $|z| = 1$

2- Résoudre l'équation (E)

2) Les racines n-ème d'un nombre complexe non nul.

Soit $a = re^{i\theta}$ un complexe non nul ($r > 0$) et considérons l'équation $(E) : z^n = a$

Si $u = \rho e^{i\alpha}$ est une solution de l'équation (E) alors : $(\rho e^{i\alpha})^n = re^{i\theta}$

$$(\rho e^{i\alpha})^n = re^{i\theta} \Leftrightarrow [\rho, \alpha]^n = [r, \theta]$$

$$\Leftrightarrow [\rho^n, n\alpha] = [r, \theta]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \quad (\text{Où } k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Propriété :

Le nombre complexe non nul $a = re^{i\theta}$ admet n racines n - éme ($n \in \mathbb{N}^*$) différentes qui sont :

$$u_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right] \text{ où } k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$$

3) Applications :**Exercice 1 :**

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

2- Ecrire les solutions sous leurs formes algébrique et déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice2 :

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - i\sqrt{3}z - 1 - i\sqrt{3} = 0$

2- En déduire sous les formes trigonométriques et algébriques les solutions de l'équation : $z^6 - i\sqrt{3}z^3 - 1 - i\sqrt{3} = 0$

IV) LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.**1) La translation :****1.1 Définition géométrique.****Définition :**

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$; on appelle **translation** la transformation dans le plan qui associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

1.2 Ecriture complexe d'une translation.

$\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que : $aff(\vec{u}) = a$ et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. La translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{MM'}) = aff(\vec{u})$$

$$\Leftrightarrow z' - z = a$$

$$\Leftrightarrow z' = z + a$$

Propriété :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que $aff(\vec{u}) = a$, la translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ si et seulement si : $z' = z + a$

Cette égalité s'appelle **l'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ tel que $aff(\vec{u}) = a$**

Exercice :

1- Donner l'écriture complexe de la translation t qui transforme $A_{(1-2i)}$ en $B_{(-4+3i)}$

2- Déterminer l'image du point $C_{(-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)}$ par la translation t .

2) L'homothétie**2.1 Définition géométrique.****Définition :**

Soient $\Omega_{(\omega)}$ un point dans le plan et k un réel non nul ; on appelle **l'homothétie de centre Ω et de rapport k** , la transformation dans le plan qui associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$ et se note $h_{(\Omega, k)}$

- Si $k = 1$ alors la transformation $h_{(\Omega, 1)}$ est l'identité de $(\mathcal{P})$ et tous les points du plan seront invariants
- Si $k \neq 1$ alors le seul point invariant par $h_{(\Omega, k)}$ est le point Ω le centre de la transformation $h_{(\Omega, k)}$.

2.2 Ecriture complexe d'une homothétie.

$\Omega_{(\omega)}$ un point dans le plan complexe et k un réel non nul et différent de 1. l'homothétie de centre $\Omega_{(\omega)}$ et de rapport k , transforme le point $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$ et se note

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \text{aff}(\overrightarrow{\Omega M'}) = \text{aff}(k \overrightarrow{\Omega M})$$

$$\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$

$$\Leftrightarrow z' = kz + \omega(1 - k)$$

Propriété :

l'homothétie de centre $\Omega_{(\omega)}$ et de rapport k , admet une écriture complexe de la forme : $z' = kz + \omega(1 - k)$

3) La rotation :

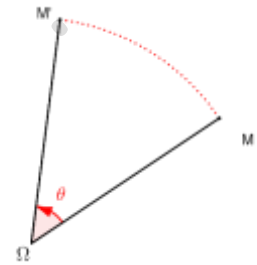
3.1 Définition géométrique :

Définition :

Soit Ω un point dans le plan et θ un nombre réel, la **rotation de centre Ω et d'angle θ** est l'application qui transforme tout point M en M' tel que :

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

On la note par : $R_{(\Omega, \theta)}$



Remarque :

- Si $\theta \equiv 0 [2\pi]$ alors la rotation d'angle nul est l'identité de $(\mathcal{P})$ et tous les points du plan seront invariants.
- Si $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$ alors le seul point invariant par $R_{(\Omega, \theta)}$ est le point Ω le centre de la rotation $R_{(\Omega, \theta)}$.

3.2 L'écriture complexe d'une rotation.

Soient $\Omega_{(\omega)}$ un point dans le plan complexe et θ un réel non nul. la rotation de centre $\Omega_{(\omega)}$ et d'angle θ , transforme le point $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z - \omega| = |z' - \omega| \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

Propriété :

La rotation de centre $\Omega_{(\omega)}$ et d'angle θ , admet une écriture complexe de la forme : $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$

Exercice :

1- Montrer qu'il existe une rotation R de centre $\Omega_{(3+i)}$ qui transforme $A_{(2+4i)}$ en $B_{(6+2i)}$.

2- Donner l'écriture complexe de la rotation R

3- Déterminer l'image de $C_{(-1+3i)}$.

4) Etude de la transformation qui transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $z' = az + b$:

1^{er} cas : $a = 0$

La transformation f est une constante, elle lie chaque point $M_{(z)}$ au point fixe $B_{(b)}$

2^{ème} cas : $a = 1$

f est la transformation qui transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que $z' = z + b$

Donc $z' - z = b$ ce qui se traduit par $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ où $aff(\vec{u}) = b$ (constant)

Dans ce cas la transformation f est une **translation de vecteur $\vec{u}$** tel que : $aff(\vec{u}) = b$

Propriété

La transformation plane f qui associe à tout point $M_{(z)}$ le point $M'_{(z')}$ tel que $z' = z + b$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ tel que $aff(\vec{u}) = b$

3^{ème} cas : $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

Soit f une transformation plane qui transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$

On a : $f(M_{(z)}) = M'_{(z')} \Leftrightarrow z' = az + b$ soit $\omega = \frac{b}{1-a}$ on a :

Le point $\Omega_{(\omega)}$ où est un point invariant par f car : $\omega' = a \left(\frac{b}{1-a} \right) + b = \frac{ab+b-ab}{1-a} = \frac{b}{1-a} = \omega$

D'où $\begin{cases} z' = az + b \\ \omega = a\omega + b \end{cases}$ en faisant la différence on obtient : $z' - \omega = a(z - \omega)$ qui se traduit par $\overrightarrow{\Omega M'} = a \overrightarrow{\Omega M}$ donc :

f est l'homothétie de centre $\Omega_{(\omega)}$ et de rapport a où $\omega = \frac{b}{1-a}$

Propriété

La transformation plane f qui associe à tout point $M_{(z)}$ le point $M'_{(z')}$ tel que $z' = az + b$ où a est un réel non nul et différent de 1 est l'homothétie de rapport a et de centre $\Omega_{(\omega)}$ tel que $\omega = \frac{b}{1-a}$

Exercice :

1- Donner l'écriture complexe de l'homothétie de rapport 2 et qui transforme $A_{(1-2i)}$ en $B_{(-4+3i)}$

2- Déterminer l'image du point $C_{(-1+5i)}$ par l'homothétie h .

4^{ème} cas : $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$

Soit f une transformation plane qui transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$; $b \in \mathbb{C}$

On a : $f(M_{(z)}) = M'_{(z')} \Leftrightarrow z' = az + b$ soit : $\omega = \frac{b}{1-a}$ (ω est la solution de l'équation : $z = az + b$) on a :

$\Omega_{(\omega)}$ est un point invariant par f . On pose $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \neq 2k\pi$ (car $a \neq 1$)

On a : $\begin{cases} z' = az + b \\ \omega = a\omega + b \end{cases}$ en faisant la différence on obtient : $z' - \omega = a(z - \omega)$ on en déduit : $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = a$ et par suite :

$\left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = |a| = 1$ par suite $|z - \omega| = |z' - \omega|$ ce que se traduit par $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$

et : $\arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) \equiv \arg(a) \pmod{2\pi}$
 $\equiv \alpha \pmod{2\pi}$

Ce qui se traduit : $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$

et finalement : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases}$ donc la transformation f est la rotation de centre $\Omega_{(\frac{b}{1-a})}$ et d'angle α .

Propriété

La transformation plane f qui associe à tout point $M_{(z)}$ le point $M'_{(z')}$ tel que $z' = az + b$ où a est un complexe tel que $|a| = 1$ est la rotation d'angle $\alpha \equiv \arg(a) [2\pi]$ et de centre $\Omega_{(\omega)}$ tel que $\omega = \frac{b}{1-a}$

5^{ème} cas : $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

Soit f une transformation plane qui transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}$, on pose $a = re^{i\alpha}$

On a : $f(M_{(z)}) = M'_{(z')} \Leftrightarrow z' = az + b$

$$\Leftrightarrow z' = re^{i\alpha}z + b$$

$$\Leftrightarrow z' = r\left(e^{i\alpha}z + \frac{b}{r}\right)$$

D'après le 4^{ème} cas ; la transformation plane qui transforme $M_{(z)}$ en $M_{1(z_1)}$ tel que : $z_1 = e^{i\alpha}z + \frac{b}{r}$ est la rotation R de d'angle α et de centre le point $\Omega_{(\omega)}$ tel que : $\omega = e^{i\alpha}\omega + \frac{b}{r}$ ($\Omega_{(\omega)}$ est le point fixe par R). (**)

Donc :

$$f(M_{(z)}) = M'_{(z')} \Leftrightarrow z' = rz_1 \quad \text{où } z_1 = e^{i\alpha}z + \frac{b}{r}$$

D'après le 3^{ème} cas ; la transformation plane qui transforme $M_{1(z_1)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $z' = rz_1$ est l'homothétie h de rapport r de centre le point $O_{(0)}$ ($O_{(0)}$ est le point fixe par h).

Donc :

$$f(M_{(z)}) = M'_{(z')} \Leftrightarrow z' = az + b$$

$$\Leftrightarrow z' = r(R(z))$$

$$\Leftrightarrow z' = h(R(z))$$

$$\Leftrightarrow z' = (hoR)(z)$$

Finalement f est la composition de la rotation R d'angle $\alpha \equiv \arg(a) [2\pi]$ et de centre $\Omega_{(\omega)}$ tel que $\omega = \frac{b}{r(1-e^{i\alpha})}$ (**)
 $\omega = \frac{b}{|a|-a}$; et de l'homothétie h de rapport $r = |a|$ et de centre $O_{(0)}$.

Théorème :

Soit a un complexe ($a \notin \mathbb{R}$). La transformation plane f qui transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $z' = az + b$ est la composition de la rotation R et de l'homothétie h ; $f = hoR$ où :

- R est la rotation d'angle $\alpha \equiv \arg(a) [2\pi]$ et de centre $\Omega_{(\omega)}$ où $\omega = \frac{b}{|a|-a}$
- h est l'homothétie rapport $r = |a|$ et de centre $O_{(0)}$.

Exercice :

Soit u un complexe non nul, et f la transformation plane qui transforme $M_{(z)}$ en $M'_{(z')}$ tel que : $z' = uz + i - \bar{u}$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques dans chacun des cas suivant :

1. $u = 1$
2. $u = -3$
3. $u = j$
4. $u = 4 - i4\sqrt{3}$

Problème :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$. soit a un complexe non nul ; Pour tout

nombre z de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, on pose $f_a(z) = z' = \frac{az}{z-a}$.

1. Montrer que $f_a(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 \operatorname{Re}(a) = |a|^2 \operatorname{Re}(z)$
2. Soit z un élément de $\mathbb{C}^* \setminus \{a\}$, on pose : $|z - a| = r$ et $\arg(z - a) \equiv \theta [2\pi]$

- a. Calculer $|f_a(z) - a|$ en fonction de r et $|a|$
 - b. Calculer $\arg(f_a(z) - a)$ en fonction de θ et r .
3. on pose $a = -1 + i$ et considérons les ensembles des points $M_{(z)}$ définis par :
- $$(D) = \{M_{(z)} ; \arg(z - a) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]\}$$
- $$(C) = \{M_{(z)} ; |f_a(z) - a| = 2\}$$
- $$(E) = \{M_{(z)} ; f_a(z) \in i\mathbb{R}\}$$
- a. Déterminer les ensembles (E) et (C) et montrer que (D) est une demi droite d'origine $A_{(a)}$ privée de A et déterminer son équation cartésienne.
 - b. soit z_0 un élément de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, et $B_{(z_0)}$ tel que $B \in (D) \cap (C)$; écrire $f_a(z_0)$ sous sa forme algébrique puis déterminer z_0 .
 - c. Construire les ensembles (D) , (C) et (E) .
4. Déterminer la représentation complexe de la rotation ρ de centre a et d'angle $\frac{\pi}{3}$
5. Déterminer la représentation complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a .
6. Déterminer la transformation top et ses éléments caractéristiques.