

# EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## I) DEFINITIONS ET NOTATIONS.

### 1) Définition :

#### Définition :

Une équation différentielle d'ordre  $n$  est une relation entre la variable réelle  $x$ , une fonction **inconnue**  $x \mapsto y(x)$  et ses dérivées d'ordre inférieure ou égale à  $n$ .

#### Remarque :

Pour s'simplifier l'écriture d'une équation différentielle on note l'inconnu (qui est une fonction)  $y$  au lieu de  $y(x)$ .

#### Exemples :

- L'équation différentielle :  $y' = \sin(2x)$  à pour solution les fonctions primitives de la fonction  $x \mapsto \sin(2x)$  qui sont :  $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(x) + c$
- $y' + 2y = 0$  est une équation différentielle de 1<sup>er</sup> ordre sans second membre.
- $y' + 2y = 3x^2 + x$  est une équation différentielle de 1<sup>er</sup> ordre avec second membre.
- $y'' - 3y' + 5y = e^x$  est une équation différentielle de 2<sup>ème</sup> ordre avec second membre.

## II) L'EQUATION $y' = ay + b$ OU $a \in \mathbb{R}^*$

### 1) L'équation $y' = ay$ ou $a \in \mathbb{R}^*$

Soit  $a$  un réel non nul et Considérons l'équation différentielle (E)  $y' = ay$

$$(E) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y'(x) = ay(x))$$

- A noter que la fonction nulle  $\theta (\forall x \in \mathbb{R})(\theta(x) = 0)$  est une solution de l'équation différentielle.
- On suppose que  $y$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  on aura :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y'(x) = ay(x)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \left( \frac{y'(x)}{y(x)} = a \right) \quad \text{On passe au primitives} \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(\ln|y(x)| = ax + c) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(|y(x)| = e^{ax+c}) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) = \pm e^c e^{ax}) \quad \text{où } c \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) = \lambda e^{ax}) \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Et puisque même la fonction nulle  $\theta$  peut s'écrire de la forme  $\theta(x) = \lambda e^{ax}$  ( $\lambda = 0$ ), on peut conclure que :

#### Propriété :

Soit  $a$  un réel non nul et (E)  $y' = ay$  une équation différentielle définie sur  $\mathbb{R}$ .

La solution **générale** de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions  $x \mapsto y(x) = \lambda e^{ax}$  où  $\lambda$  est un réel.

#### Applications :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $(E_1): y' = 3y$
2.  $(E_2): y' - y = 0$
3.  $(E_3): 3y' - 2y = 0$

### 2) L'équation $y' = ay + b$ ou $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ .

Soient  $a$  un réel non nul,  $b$  un réel quelconque, Considérons l'équation différentielle (E)  $y' = ay + b$

$$\begin{aligned}
(E) &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y'(x) = a \left( y(x) + \frac{b}{a} \right)) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \left( y(x) + \frac{b}{a} \right)' = a \left( y(x) + \frac{b}{a} \right) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(z'(x) = az(x)) \quad \text{où } z(x) = y(x) + \frac{b}{a} \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \left( y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax} \right) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \left( y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \right)
\end{aligned}$$

**Propriété :**

Soit  $a$  un réel non nul et  $b$  un réel,  $(E) \ y' = ay + b$  une équation différentielle définie sur  $\mathbb{R}$ .

**La solution générale** de l'équation différentielle  $(E)$  est l'ensemble des fonctions  $x \mapsto y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$  où  $\lambda$  est un réel.

**Remarque :**

Le réel  $\lambda$  dans la solution générale de l'équation différentielle  $(E)$  peut-être déterminé par les conditions initiales

**Exemple :**

- 1- Résoudre l'équation différentielle  $y' + 2y = 3$
- 2- déterminer la solution  $\varphi$  de  $(E)$  telle que  $\varphi(1) = -1$ .

**Solution :**

1- d'après la propriété précédente : La solution générale de l'équation différentielle  $(E)$  est l'ensemble des fonctions  $x \mapsto y(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{3}{2}$  où  $\lambda$  est un réel.

2-  $\varphi$  est une solution de  $(E)$  donc  $\varphi(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{3}{2}$  et puisque  $\varphi(1) = -1$  alors :  $\lambda e^{-2} + \frac{3}{2} = -1$

donc  $\lambda e^{-2} = \frac{-5}{2}$  d'où  $\lambda = \frac{-5e^2}{2}$  et par suite :  $\varphi(x) = \frac{-5e^2}{2} e^{-2x} + \frac{3}{2}$

**Exercice :**

Considérons les équations différentielles  $(E_0): y' - y = 0$  et  $(E): y' - y = 2x^2 + x$

- 1- Résoudre l'équation différentielle  $(E_0)$
- 2- a) Soit  $P$  une fonction polynôme, quel sera le degré de  $P$  afin que  $P$  soit une solution de  $(E)$
- b) Déterminer le polynôme  $P$  pour que  $P$  soit une solution de  $(E)$
- c) Montrer que :  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $(y - P)$  est solution de  $(E)$
- d) En déduire la solution générale de l'équation  $(E)$
- 3) déterminer la solution  $\varphi$  de  $(E)$  telle que  $\varphi(0) = 2$

**III) LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES :  $ay'' + by' + cy = 0$** 

Soit  $a$  un réel non nul et  $b$  et  $c$  sont des réels quelconques.

**Définition :**

Considérons l'équation différentielle :  $(E): ay'' + by' + cy = 0$  l'équation (1):  $ar^2 + br + c = 0$  a variable réelle  $r$  s'appelle **l'équation caractéristique de l'équation différentielle  $(E)$** .

**Exemple :**

- l'équation caractéristique de l'équation différentielle  $(E): -3y'' + 2y' - 4y = 0$  est (1):  $-3r^2 + 2r - 4 = 0$
- l'équation caractéristique de l'équation différentielle  $(E): y'' + y = 0$  est (1):  $r^2 + 1 = 0$ .

**1) Résolution de l'ED (E):  $ay'' + by' + cy = 0$** 

L'équation  $ay'' + by' + cy = 0$  est dite à coefficients constants car  $a, b$  et  $c$  sont des réels donnés. On supposera  $a \neq 0$  (sinon, l'équation est du premier ordre).

**1.1) Linéarité**

L'équation  $ay'' + by' + cy = 0$  possède la propriété suivante :

Si  $y_1$  et  $y_2$  sont deux fonctions solutions de l'équation :  $ay'' + by' + cy = 0$ , alors, pour tous nombres  $A$  et  $B$ , la fonction  $Ay_1 + By_2$  est aussi une solution.

La démonstration de cette propriété est facile et utilise les propriétés de la dérivation.

A cause de cette propriété, on dit que l'équation :  $ay'' + by' + cy = 0$  est linéaire.

**1.2) Résolution**

Par analogie avec une équation du premier ordre, on cherche une solution de la forme :  $y(x) = e^{rx}$  où  $r$  est un complexe.

La fonction  $g(x) = e^{rx}$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et, pour tout réel  $x$  :  $y'(x) = re^{rx}$ ,  $y''(x) = r^2e^{rx}$

Donc, dire que  $y$  est solution équivaut à dire que, pour tout réel  $x$  :  $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$

soit encore, puisque  $e^{rx}$  n'est jamais nul, à :  $ar^2 + br + c = 0$

La résolution de l'équation  $ar^2 + br + c = 0$  permet donc de trouver des solutions (a priori à valeurs complexes). De plus, lorsque l'on connaît deux solutions  $y_1$  et  $y_2$  de l'équation  $ay'' + by' + cy = 0$ , on en connaît une famille car toutes les fonctions  $Ay_1 + By_2$ , avec  $A$  et  $B$  complexes, sont aussi solutions.

- **Premier cas** : Si  $\Delta > 0$  alors l'équation  $ar^2 + br + c = 0$  a deux racines,  $r_1$  et  $r_2$ , réelles et distinctes.

D'après ce qui précède, les fonctions  $y_1$  et  $y_2$ , définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $y_1(x) = e^{r_1x}$  et  $y_2(x) = e^{r_2x}$  sont des solutions (à valeurs réelles dans ce cas).

Nous admettrons que toute autre solution réelle s'écrit :  $y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$  où  $A$  et  $B$  réels.

- **Deuxième cas** : Si  $\Delta < 0$  alors l'équation  $ar^2 + br + c = 0$  a deux racines,  $z_1$  et  $z_2$ , complexe conjugués.

Alors les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $g_1(x) = e^{z_1x}$ , et  $g_2(x) = e^{\bar{z}_1x}$  sont des solutions à valeurs complexes.

Notons  $z_1 = \alpha + i\omega$  où  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  et  $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$  sont des réels.

$$g_1(x) = e^{z_1x} = e^{(\alpha+i\omega)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\omega x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)) \text{ et}$$

$$g_2(x) = e^{\bar{z}_1x} = e^{(\alpha-i\omega)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\omega x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos(\omega x) - i\sin(\omega x))$$

$$y_1 = \frac{g_1(x) - g_2(x)}{2} \text{ et } y_2 = \frac{g_1(x) + g_2(x)}{2i} \text{ sont aussi des solutions de l'ED (E) et à valeurs réelles et on a :}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\omega x) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R})(y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\omega x))$$

Nous admettrons que toutes les solutions s'écrivent de la forme :  $y = Ae^{\alpha x} \cos(\omega x) + Be^{\alpha x} \sin(\omega x)$

Pour résumer : si  $z_1 = p + iq$  alors toutes les solutions de l'ED s'écrivent de la forme :

$$y = e^{px}(A \cos(qx) + B \sin(qx)) \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des réels.}$$

- **Troisième cas** : Si  $\Delta = 0$  l'équation  $ar^2 + br + c = 0$  a une racine double  $r = \frac{-b}{2a}$

La fonction  $y_1 = e^{rx}$  définie sur  $\mathbb{R}$  est solution de l'ED (E) ; nous admettrons que la fonction  $y_2 = xe^{rx}$  est aussi solutions de (E) et que toutes les solutions de (E) s'écrivent de la forme  $y = (Ax + B)e^{rx}$  où  $A$  et  $B$  sont des réels

**Théorème :**

Soit l'équation différentielle  $(E)$   $ay'' + by' + cy = 0$  et soit  $(E_1): ar^2 + br + c = 0$  son équation caractéristique.  $\Delta = b^2 - 4ac$  le discriminant de  $(E_1)$

- Si  $\Delta > 0$  l'équation  $(E_1)$  a deux racines,  $r_1$  et  $r_2$ , réelles et distinctes et les solutions de l'équation  $(E)$  sont les fonctions  $y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$  où  $A$  et  $B$  réels
- Si  $\Delta < 0$  l'équation  $(E_1)$  a deux racines,  $z_1$  et  $z_2$ , complexes conjugués et si  $z_1 = p - iq$  alors les solutions de l'équation  $(E)$  sont les fonctions  $y = e^{px}(A \cos(qx) + B \sin(qx))$  où  $A$  et  $B$  réels
- Si  $\Delta = 0$  l'équation  $(E_1)$  admet une racine double  $r = -\frac{b}{2a}$  et les solutions de l'ED  $(E)$  sont les fonctions :  $y = (Ax + B)e^{rx}$  où  $A$  et  $B$  sont des réels .

**Exercice :**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $2y'' + y' - 3y = 0$
2.  $y'' + 2y' + 2y = 0$
3.  $y'' + 4y' + 4y = 0$
4.  $y'' + 2y = 0$