Niveaux: SM PC	Matière: Physique
PROF :Zakaryae Chriki	Résumé N:17

Oscillateurs Mécaniques :Pendule de Torsion

I.Pendule de Torsion

Un pendule de torsion est un dispositif constitué d'une barre horizontale, fixée à un support par l'intermédiaire d'un fil métallique.

1. Le moment du couple :de torsion

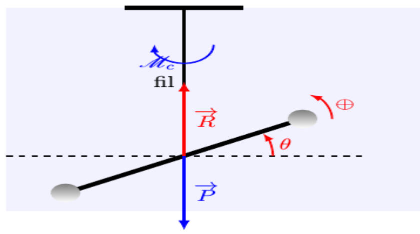
Le moment du couple de torsion qu'exerce un fil tordu est indépendant de l'axe de rotation , il a pour expression : $\boxed{\mathscr{M} = -C.\theta}$

C : la constante de torsion du fil (N.m/rad)
θ : angle de torsion (rad)
$\mathscr{M}$: moment du couple de torsion (N.m)

Remarques :

* Le signe négatif signifie que le couple de torsion est un couple de rappel ;
* La constante de torsion du fil dépend de la longueur du fil , de la section et de sa nature.

2. Equation différentielle :



On étudie le mouvement du système dans un référentielle terrestre supposé Galiléen . On repère les position de la tige à chaque instant par l'abscisse angulaire $\theta(t)$ mesuré à partir de la direction de la tige à l'équilibre . (Direction de référence)

La tige est soumise à des forces suivantes :

* le poids $\vec{P}$
* la force $\vec{R}$ exercée par le fil
* du couple de torsion de moment $\mathscr{M}_c = -C.\theta$

On applique la relation fondamentale de la dynamique de rotation au système : $\Sigma\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathscr{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathscr{M}_c = J_\Delta.\ddot{\theta}$ Les droites d'actions de $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont confondues avec l'axe Δ ; donc $\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$ et $\mathscr{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$

$-C.\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$ $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}.\theta = 0}$ C'est l'équation différentielle du mouvement du pendule .

En absence des frottements , labscisse angulaire de la tige d'un pendule de torsion libre , vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}.\theta = 0}$$

3. Equation horaire ou la solution de l'equation différentielle :

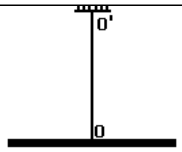
La solution de cette équation différentielle est de la forme : $\boxed{\theta(t) = \theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_0\right)}$

θ_m est l'amplitude des oscillations (rad) , φ_0 est la phase à l'origine des dates (rad) et T_0 la période propre du pendule de torsion .

❖ **Expression de T_0 en fonction du moment d'inertie J_Δ**

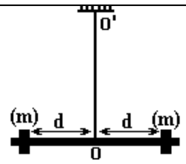
$J_\Delta = \Sigma m_i.r_i^2$:
- Moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe (Δ)
- Exprime la répartition de la matière autours de l'axe (Δ)
- S'exprime en Kg.m²

NB :
Toute modification soit de la masse ou de sa position par rapport à l'axe modifie la valeur J_Δ



$J_0 = \Sigma m_i.r_i^2$

$$T_0 = 2\pi.\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

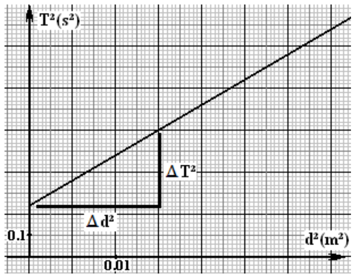


On fixe deux masselottes identiques de masses m de part et d'autres de l'axe à une distance d

$J_\Delta = \Sigma m_i.r_i^2 = J_0 + 2.m.d^2$

$$T_0 = 2\pi.\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} = 2\pi.\sqrt{\frac{J_0 + 2.m.d^2}{C}}$$

⁂ Exploiter la courbe T²=f(m) ou T²=f(d²)



On a $\mathbf{T_0 = 2\pi.\sqrt{\frac{J_0+2.m.d^2}{C}}}$ alors $\mathbf{T_0^2 = 4\pi^2.\frac{J_0}{C} + 8\pi^2.\frac{m.d^2}{C}}$ m=50g Masse de la masselotte

$\mathbf{T_0^2 = 4\pi^2.\frac{J_0}{C} + 8\pi^2.\frac{m.d^2}{C}}$ La courbe T²=f(d²) est une fonction affine donc T² = A.d² + B avec :

- $A = 8\pi^2.\frac{m}{C} = \frac{\Delta T_0^2}{\Delta d^2} = \frac{0.36}{0.015} = 24\ s^2/m^2$, on en déduit C , $C = 8\pi^2.\frac{m}{A}$
- $B = 4\pi^2.\frac{J_0}{C} = 0.24\ s^2$, on en déduit J_0 , $J_0 = \frac{B.C}{4\pi^2}$

II.Etude Energitique

Energie du système est la somme des énergies de ses composantes

1. Energie cinétique :

On considère un pendule de torsion formé d'un fil métallique léger auquel est fixé une tige dense . Soit J_Δ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation matérialisé par le fil métallique et $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de la tige à instant t . On définit l'énergie cinétique du système qu'est en rotation autour de Δ, à cet instant t par l'expression suivante : $\boxed{E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2}$

$$\boldsymbol{\theta = \theta m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\dot{\theta} = -\theta m.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}}$$

$$\mathbf{Ec = \frac{1}{2}.J_\Delta\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}.J_\Delta\left(-\theta m.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)\right)^2 = \frac{1}{2}.C(\theta_m^2-\theta^2)}$$

- Si θ = θm ou θ =- θm alors l'énergie cinétique est nulle donc la vitesse est nulle et l'oscillateur s'arrête et change le sens de son mouvement
- Si θ = 0 alors l'oscillateur passe par sa position d'équilibre et son énergie cinétique est maximale et sa vitesse l'est aussi

2. Energie potentielle de torsion

L'énergie potentielle de torsion d'un pendule de torsion est définie par la relation : $\boxed{E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte}$

Avec C la constante de la torsion du pendule , θ angle de torsion en rad et Cte une constante qui dépend du choix de l'état de référence fourni par les conditions initiales . En générale , on prend $E_{pt} = 0$ pour $\theta = \theta_0 = 0$; soit Cte=0 d'où $E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2$

$$Ep_t = \frac{1}{2}.C.\theta^2 = \frac{1}{2}.C.\left(\theta m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)\right)^2 = \frac{1}{2}.C.\theta_m^2.\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)$$

3. Expresion de la variation de l'énergie potentielle de torsion :

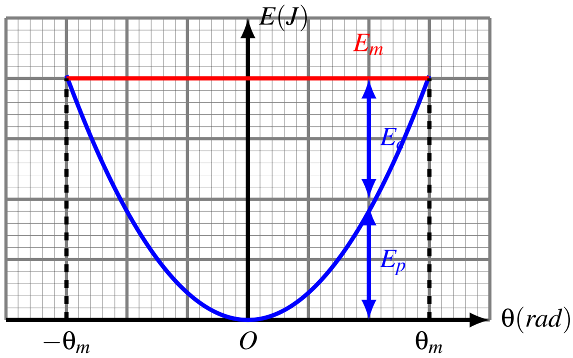
ΔEp_t : Variation de l'énergie potentielle de torsion $\mathbf{\Delta Ep_t = \frac{1}{2}.C.(\theta_2^2 - \theta_1^2) = -W_{1\to 2}(\mathcal{M}_c)}$

4. Energie mécanique :

On définit l'énergie mécanique d'un pendule de torsion par la relation suivante : $\boxed{E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte}$

Dans le cas où $Cte = 0$ on a alors : $\boxed{E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2}$

5. Diagramms d'énergie d'un penddule de trosion :



Lorsque la tige passe par sa position d'équilibre : $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = \pm\dot{\theta}_m$ soit $E_{pt} = 0$ et $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^2$

Lorsque la tige passe par ses positions extrêmes : $\theta = \pm\theta_m$ et $\dot{\theta} = 0$

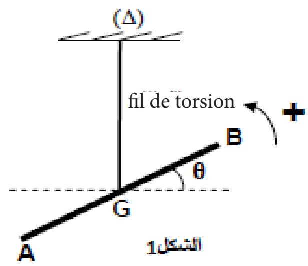
$E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta_m^2$ et $E_c = 0$

L'énergie mécanique d'un pendule de torsion libre et amorti se conserve : $E_m\frac{1}{2}C\theta_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^2 = Cte$

EXERCICE 1

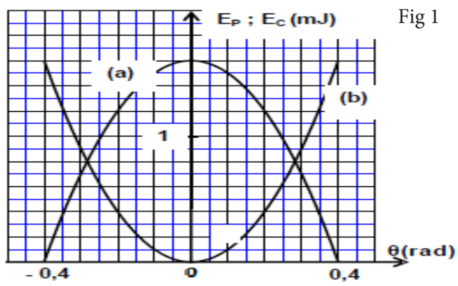
Le pendule de torsion permet de déterminer quelques grandeurs physique relatives à la matière comme la constante de torsion des matières solides déformables et le moment d'inertie des systèmes mécaniques oscillants .
On étudie de manière simplifiée comment déterminer la constante de torsion d'un fil métallique et quelques grandeurs cinématiques et dynamiques en exploitant les diagrammes d'énergie d'un pendule de torsion .
Un pendule de torsion est constitué d'un fil métallique vertical de constante de torsion C et d'une tige homogène AB , son moment d'inertie $J_\Delta = 2{,}4.10^{-3}$ kg.m^2 par rapport à l'axe vertical (Δ) confondu avec le fil et passant par G le centre d'inertie de la tige .

On fait tourner la tige AB horizontalement dans le sens positif autour de l'axe (Δ)de l'angle $\theta_m = 0{,}4$ rad par rapport à sa position d'équilibre , et on la libère sans vitesse initiale à l'instant t = 0 pris comme origine des dates . On repère la position de la tige à tout instant à l'aide de son abscisse angulaire θ par rapport à la position d'équilibre (Figure 1).
On étudie le mouvement du pendule dans un référentiel lié à la Terre considéré galiléen .
On considère la position d'équilibre comme référence de l'énergie potentielle de torsion et le plan horizontale passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur .
On néglige tous les frottements .
Les deux courbes (a) et (b) de la figure 2 représentent les variations de l'énergie potentielle E_P de l'oscillateur et son énergie cinétique E_C en fonction de θ .



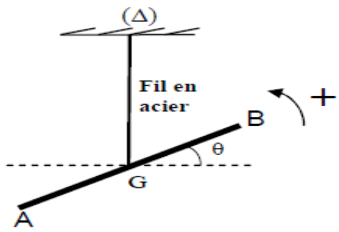
0. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation autour d'un axe fixe, déterminer que l'équation différentielle du mouvement du système étudié .

1- Relier en justifiant votre réponse chaque courbe à l'énergie correspondante .
2- Déterminer la constante de torsion Cdu fil métallique .
3- Trouver la valeur absolue de la vitesse angulaire $\dot{\theta}_1$ du pendule au passage par la position d'abscisse angulaire $\theta_1 = 0{,}2$ rad .
4- Calculer le travail du moment du couple de torsion $W(\mathcal{M}_C)$ lors du déplacement de l'oscillateur de la position d'abscisse angulaire θ = 0 à la position d'abscisse angulaire θ_1 .



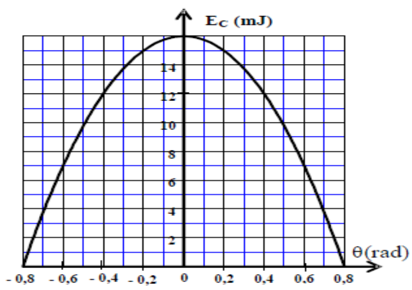
EXERCICE 2

Un pendule de torsion est constitué d'un fil en acier vertical, de constante de torsion C, et d'une tige AB homogène de moment d'inertie J_Δ par rapport à un axe vertical (D) confondu avec le fil et passant par le centre d'inertie G de la tige.
On écarte la tige horizontalement, dans le sens positif, d'un angle θ_m =0,8 rad par rapport à sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale à un instant t=0.
On repère la position de la tige à chaque instant par l'abscisse angulaire θ par rapport à la position d'équilibre. (voir figure ci-contre)
On étudie le mouvement du pendule dans un référentiel terrestre considéré galiléen.
On considère la position d'équilibre du pendule comme référence de l'énergie potentielle de torsion et le plan horizontal passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur.
On néglige tout frottement.



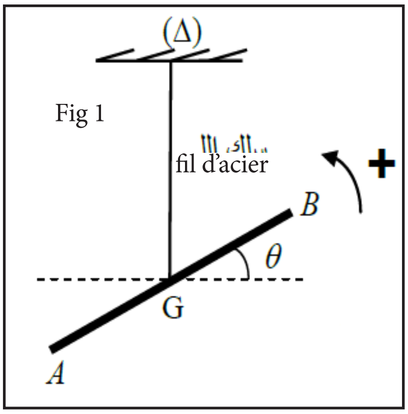
La courbe de la figure ci-contre, représente les variations de l'énergie cinétique E_C du pendule en fonction de l'angle θ .

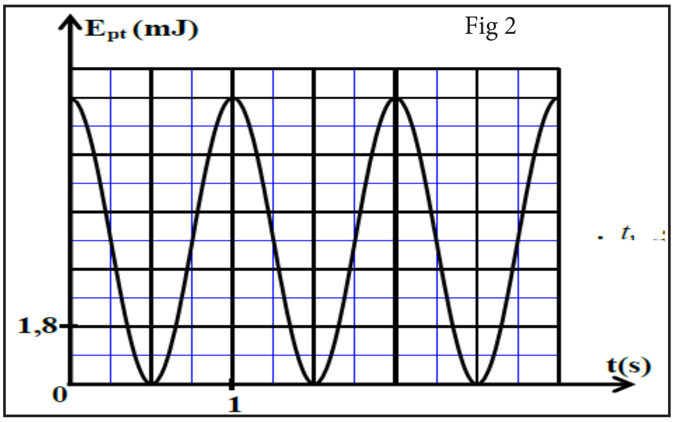
1- Écrire l'expression de l'énergie mécanique du pendule en fonction de C, J_Δ , θ et la vitesse angulaire$\dot{\theta}$.
2- Déterminer la valeur de la constante de torsion C du fil en acier.
3. Sachant que la vitesse angulaire maximale est $\dot{\theta}_{max}$=2,31rad.s^{-1}
Trouver la valeur de J_Δ .



EXERCICE 3

Deuxième partie : étude énergétique du mouvement du pendule de torsion
Le fonctionnement d'un ensemble d'appareils de mesure comme le pendule de Cavendish et le galvanomètre , est basé sur la propriété de torsion puisqu'ils contiennent des ressorts spiraux ou des fils métalliques rectilignes .
On considère un pendule de torsion composé d'un fil d'acier vertical de constante de torsion C et d'une tige homogène AB suspendu à l'extrémité libre du fil par son centre G . (figure)
On note J_Δ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation (Δ) confondu avec le fil .
On fait tourner la tige AB autours de l'axe (Δ) dans le sens positif d'un angle θ_m de sa position d'équilibre , et on le libère sans vitesse initiale à l'instant pris comme origine des dates et il effectue un mouvement circulaire sinusoïdal .
On considère la position d'équilibre comme référence de l'énergie potentielle de torsion ($E_{Pt} = 0$ à θ = 0) , et le plan horizontal passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur ($E_{PP} = 0$) .
On donne : le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation (Δ) : $J_\Delta = 2{,}9.10^{-3}$ kg.m^2 .
La courbe de la figure 2 représente les variation de l'énergie potentielle de torsion E_{Pt} en fonction du temps . En vous aidant de cette courbe ;
1- Déterminer l'énergie mécanique E_m de ce pendule .
2- Trouver la valeur absolue de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ à l'instant $t_1 = 0{,}5$ s .
3- Calculer le travail W du couple de torsion entre les instants $t_o = 0$ et t_1 .





EXERCICE 4

Le pendule de torsion représenté sur la figure 1 est constitué d'un fil de torsion de constante de torsion C_0 et de longueur ℓ, et d'une tige homogène AB .

On fixe la tige AB par son milieu au fil de torsion en un point O qui divise le fil en deux parties :

- Une partie OM de longueur z et de constante de torsion C_1;
- Une partie ON de longueur ℓ-z et de constante de torsion C_2.

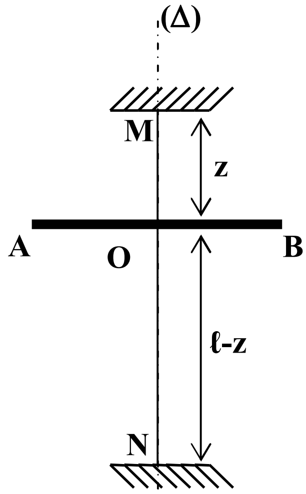


Figure1

Lorsque le fil est tordu d'un angle θ , la partie OM exerce sur la tige un couple de torsion de moment $M_1=-C_1\theta$, et la partie ON exerce sur la tige un couple de torsion de moment $M_2=-C_2\theta$.

On exprime la constante de torsion C d'un fil de torsion de longueur L par la relation $C=\frac{k}{L}$ avec k une constante qui dépend du matériau constituant le fil de torsion et du diamètre de ce fil .

J_Δ représente le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation (Δ) confondu avec le fil de torsion

Au début le fil de torsion est non tordu et la tige AB est horizontale .

On fait tourner la tige AB autours de l'axe (Δ) d'un angle θ_m de sa position d'équilibre stable et on l'abandonne sans vitesse initiale , elle effectue alors des oscillations dans le plan horizontal .

On repère la position de la tige AB à une date t par l'abscisse angulaire θ que fait la tige à cet instant avec la droite horizontale confondue avec la position d'équilibre de la tige.

On néglige tous les frottements .

1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique relative à la rotation , montrer que l'équation différentielle du mouvement de ce pendule s'écrit : $\ddot{\theta}+\frac{C_0.\ell^2}{J_\Delta.z.(\ell-z)}\cdot\theta=0$.

2- Trouver l'expression littérale de la période propre T_0 de l'oscillateur pour que la solution de l'équation différentielle soit : $\theta=\theta_m.\cos\left(\frac{2\pi.t}{T_0}\right)$.

3- La courbe de la figure 2 représente la variation de l'accélération angulaire de la tige en fonction de l'abscisse angulaire θ dans le cas où $z=\frac{\ell}{2}$.

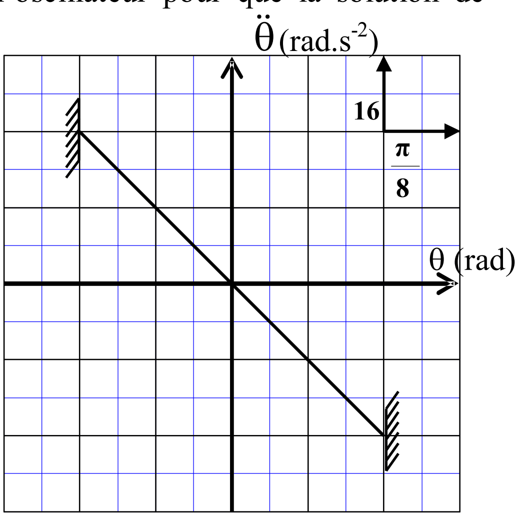


Figure2

3.1- Déterminer la valeur de T_0 dans ce cas .

3.2- On choisit le plan horizontal qui contient la tige AB comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur et on choisit comme état de référence de l'énergie potentielle de torsion la position d'équilibre de la tige où θ=0.

a- Déterminer dans le cas où $z=\frac{\ell}{2}$, l'expression de l'énergie mécanique E_m de l'oscillateur à un instant t en fonction de J_Δ , C_0 , θ et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de la tige AB.

b- Sachant que $E_m=4.10^{-3}$ J , Calculer C_0 . On prend $\pi^2=10$.

EXERCICE 5

Partie II: Etude du mouvement d'un pendule de torsion

Cet exercice a pour objectif d'étudier le mouvement d'un pendule de torsion et de déterminer quelques grandeurs liées à ce mouvement.

On dispose d'un pendule de torsion constitué d'un fil métallique , de constante de torsion C et d'une tige MN homogène fixée en son centre d'inertie G à l'une des extrémités du fil. L'autre extrémité du fil est fixée en un point P d'un support (figure 4).

La tige peut effectuer un mouvement de rotation sans frottement autour de l'axe (Δ) confondu avec le fil métallique. Le moment d'inertie de la tige MN par rapport à cet axe est $J_\Delta = 4.10^{-4}\ kg.m^2$.

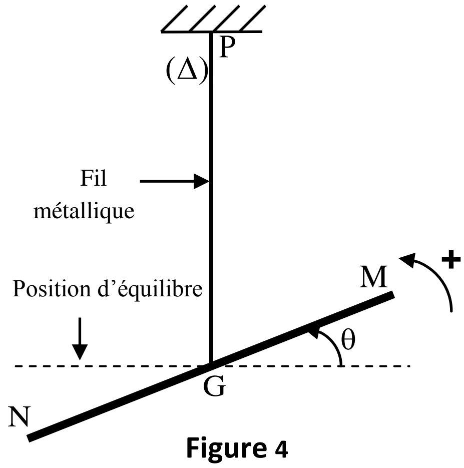


Figure 4

On étudie le mouvement du pendule dans un repère lié à un référentiel terrestre supposé galiléen. On repère la position de la tige MN à chaque instant t par son abscisse angulaire θ par rapport à sa position d'équilibre stable(figure 4).

On choisit la position d'équilibre stable comme référence de l'énergie potentielle de torsion $(E_{pt} = 0)$ et le plan horizontal passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur $(E_{pp} = 0)$.

On prendra $\pi^2 = 10$.

Le pendule effectue des oscillations d'amplitude $\theta_m = \frac{\pi}{4} rad$. L'étude expérimentale a permis d'obtenir la courbe de la figure 5 représentant les variations de la vitesse angulaire de l'oscillateur en fonction du temps.

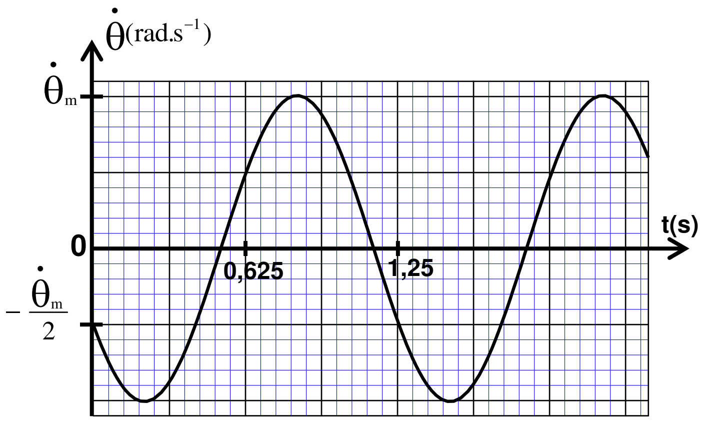


Figure 5

1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation, établir l'équation différentielle du mouvement du pendule.

2-La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme : $\theta(t) = \theta_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ où T_0 est la période propre du pendule.

2-1- Montrer que l'expression numérique de la vitesse angulaire , exprimée en $rad.s^{-1}$, s'écrit :

$$\dot{\theta}(t) = 4.\sin\left(1,6\pi t + \frac{7\pi}{6}\right).$$

2-2-Déterminer la valeur de la constante de torsion C du fil.

3-Trouver la valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur et en déduire la valeur de son énergie potentielle à l'origine des dates $t = 0$.

Prof.Zakaryae Chriki