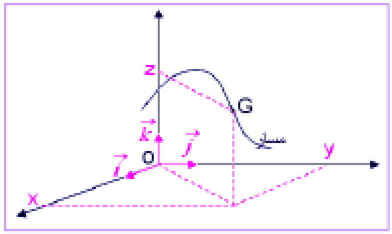
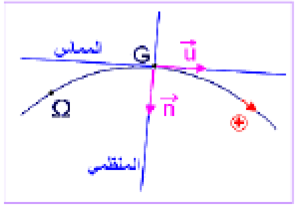
Mécanique :Lois de Newton

1)Mouvement du centre de gravité d'un solide

Repère de Dicarte



Repère de Fresnel



Le centre de gravité G est repéré par :

$$\overrightarrow{OG} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$s = \widehat{\Omega G}$$

Equations Horaires ou équations paramétriques du mouvement

X = f(t), y = f(t), z = f(t)

s = f(t)

Equation de la trajectoire : on élimine le temps

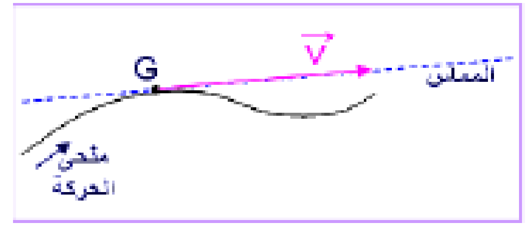
- Vecteur vitesse

La vitesse instantanée du centre de gravité est définie par :

$$\overrightarrow{V}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

Propriétés d $\vec{V}$

- Origine : centre de gravité G
- Direction : tangente à la trajectoire
- Sens : sens du mouvement



Expression de V

Repère de Dicarte

$$\vec{V}_G = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\vec{V}_G \begin{cases} v_x = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dot{z} = \dfrac{dz}{dt} \end{cases} \qquad (m.s^{-1})$$

$$\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (m.s^{-1})$$

Repère de Fresnel

$$\vec{V}_G = v\vec{u}$$

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$$

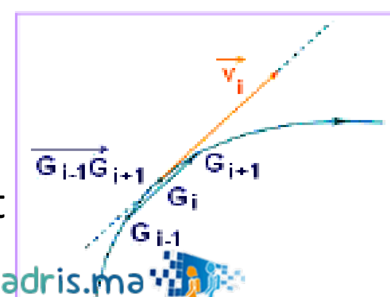
$$v = \pm\left\|\vec{V}\right\|$$

V > 0 G se déplace dans le sens du mouvement

V < 0 G se déplace dans le sens contraire du mouvement

Construction de V

A partir de l'enregistrement du mouvement à des intervalles de temps réguliers



$$\boxed{\vec{v}_i \approx \frac{\overrightarrow{G_{i-1}G_{i+1}}}{2\tau}}$$

➢ Vecteur accélération

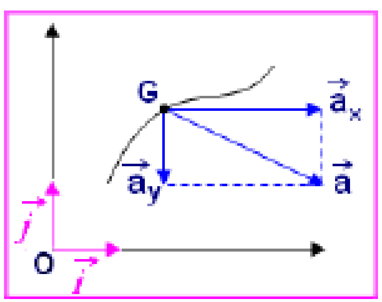
$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}$$

Repère de Dicarte

$$\vec{a}_G = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{cases} \qquad (m.s^{-2})$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (m.s^{-2})$$



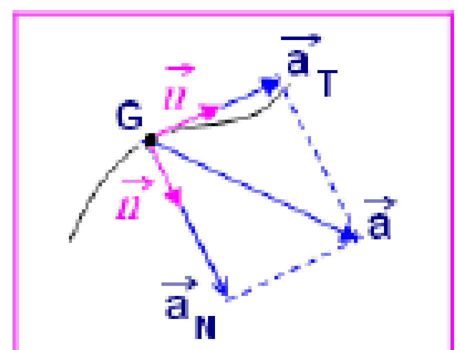
Repère de Fresnel

$$\vec{a}_G = a_T\vec{u} + a_N\vec{n}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \quad (m.s^{-2})$$



1)- Référentiels Galiléens.

Le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v}$ permet de connaître si un mouvement est retardé ou accéléré.

$$\vec{a} \cdot \vec{v} \begin{cases} > 0 & \text{mouvement accéléré} \\ < 0 & \text{mouvement retardé} \\ 0 & \text{mouvement uniforme} \end{cases}$$

Lois de Newton

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel les lois de Newton sont vérifiées.

- Pour simplifier létude du système, on choisit toujours un référentiel adapté.

Première loi de Newton : le principe de l'Inertie

Dans un référentiel galiléen, si un système assimilé à un point matériel n'est soumis à aucune force (système isolé) ou s'il est soumis à un ensemble de forces dont les effets se compensent (système pseudo-isolé), alors il est immobile ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

$$\boxed{\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \leftrightarrow \quad \vec{V}_G = \vec{Cte}}$$

Deuxième loi de Newton : Principe fondamental de la dynamique.

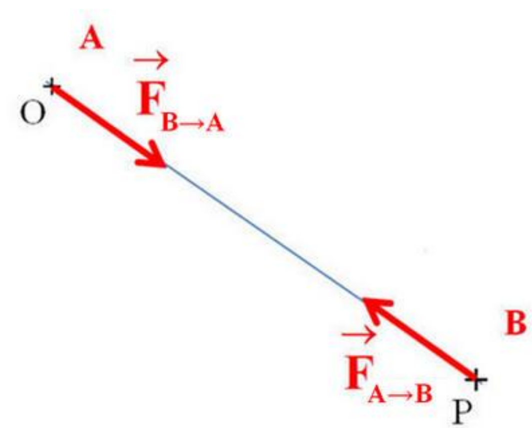
Dans un référentiel galiléen, si un système assimilé à un point matériel est soumis à une ou plusieurs forces extérieures, alors la somme vectorielle de ces forces est égale à la dérivée par rapport au temps de son vecteur quantité de mouvement :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{Ou} \qquad \boxed{\Sigma \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G}$$

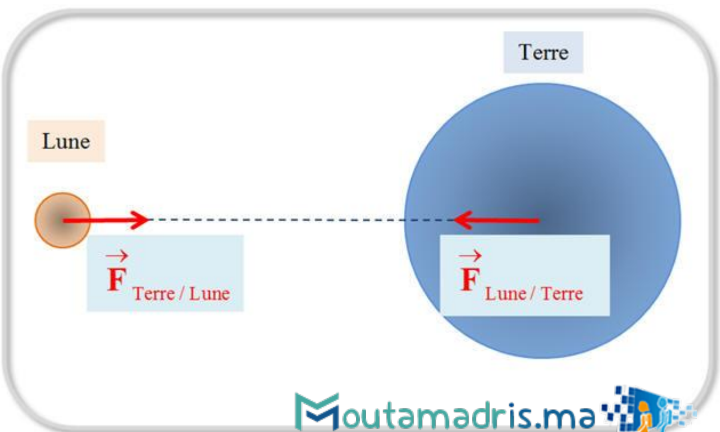
Troisième loi de Newton : Principe des actions réciproques.

Soit deux corps A et B qui exercent mutuellement une force sur l'autre corps. Alors on a :

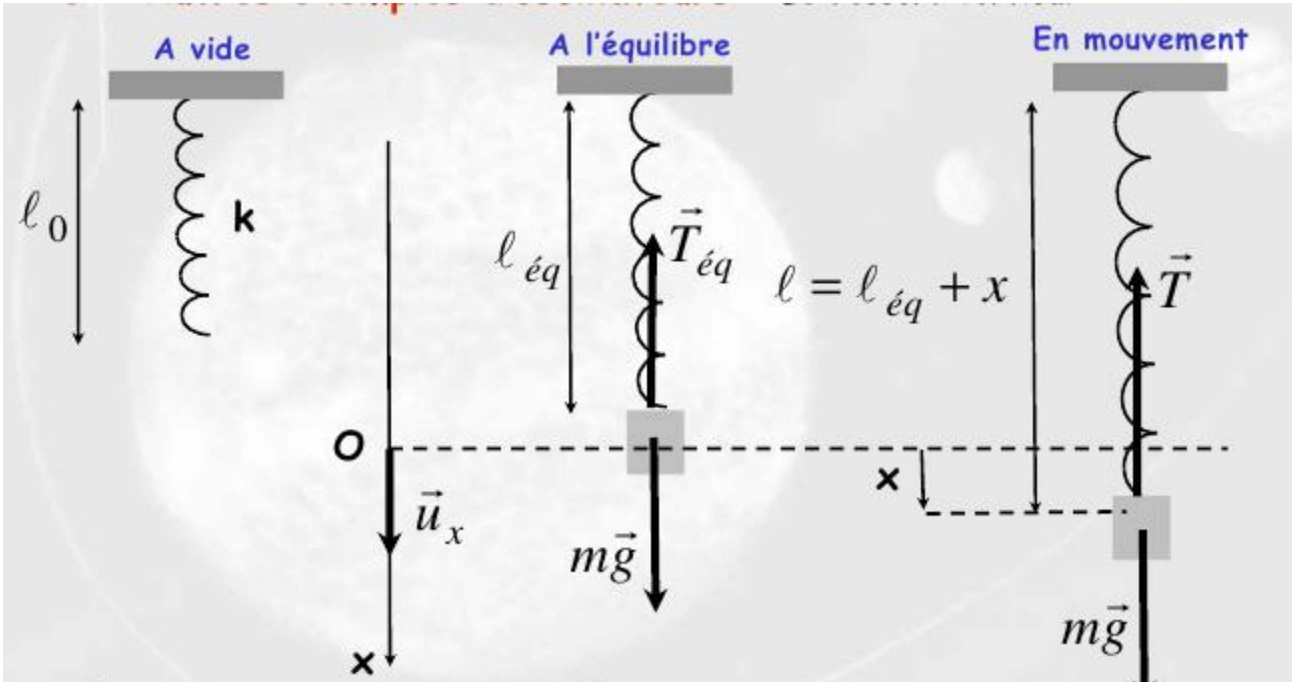
$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$



Exemple



Ressort vertical



$$\vec{T}_{éq} = -k(\ell_{éq} - \ell_0)\vec{u}_x \quad ; \quad \vec{T} = -k(\ell_{éq} + x - \ell_0)\vec{u}_x$$

En l'absence de frottements :

A l'équilibre : $m\vec{g} + \vec{T}_{éq} = \vec{0} \quad ; \quad -k(\ell_{éq} - \ell_0)\vec{u}_x + mg\vec{u}_x = \vec{0} \quad ; \quad \ell_{éq} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$

En mouvement : $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} \quad ; \quad -k(\ell_{éq} + x - \ell_0)\vec{u}_x + mg\vec{u}_x = m\ddot{x}\,\vec{u}_x$

En tenant compte de la relation obtenue à l'équilibre :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (Avec\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

Exercice d'application 2

Un mobile se déplace dans le plan muni du repère $R(O,\vec{i},\vec{j})$ *avec* un vecteur accélération $a = -8\,\vec{j}$.
A l'instant initial t=0, le vecteur position du mobile ainsi que son vecteur vitesse sont donnés respectivement par : $\overrightarrow{OM_0} = -3\vec{i}+3\vec{j}$ et $\vec{V_0} = 2\vec{i}+4\vec{j}$

2.1. Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile est de la forme $y=A.x^2 B.x + C$ où A, B et c sont des constantes à déterminer.

2.2. A quelle date le mobile atteint-il le sommet de sa trajectoire?

2.3. Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t_0=0$ et $t_1=1s$.

2.4. Calculer l'accélération moyenne entre ces mêmes instants.

2.5. Sur quel intervalle de temps le mouvement est-il décéléré?

1) TCI $\Rightarrow \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{a}\begin{cases}\ddot{x} = 0\\ \ddot{y} = -g\end{cases} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases}\dot{x} = V_0\cos\alpha\\ \dot{z} = -gt + V_0\sin\alpha\end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases}x = V_0\cos\alpha\, t\\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\sin\alpha\, t + h\end{cases} \quad - (1)$$

2) $$z = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + h \quad - (0,5)$$

4) la balle touche le sol pour $z = 0$

$$z = -\frac{x^2}{10} + x + 2,7 = 0$$

$x = 12,21\,m$ ou $x = -2,21$ (impossible)

$$x = V_0\cos\alpha\, t \Rightarrow t = \frac{x}{V_0\cos\alpha}$$

$$t = \frac{12,21}{10\times\cos 45} = 1,73\,s$$

$$\vec{v}\begin{cases}\dot{x} = 10\times\cos 45 = 7,07\\ \dot{z} = -10\times(1,73) + 10\times\sin 45 = -10,13\end{cases}$$

$$v = \sqrt{7,07^2 + 10,13^2} = 12,35\,m\,s^{-1} \quad - (1)$$

$$\tan\beta = \frac{-10,13}{7,07} \Rightarrow \beta = -55,1° \quad - (0,5)$$

3) Coordonnée de S

$$z' = -\frac{x_S}{5} + 1 = 0 \Rightarrow x_S = 5m$$

$$z_S = -\frac{25}{10} + 5 + 2,7 = 5,2\,m$$

S(5m; 5,2m) - (1)

5) On pose $\alpha = 0$

$$z = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + h$$

$$z = -\frac{g}{2V_0^2}x^2 + h \quad - (0,5)$$

6) $$z(x=12) = -\frac{10}{2\times 25^2}\times 12^2 + 2,7 = 1,55\,m$$

$z(x=L) = 1,55\,m > 1\,m$ donc la balle franchira le filet. - (1)

$$z = 0 \Rightarrow x_{sol} = \sqrt{\frac{2V_0^2 h}{g}} = 18,4\,m$$

$d = 18,4m - 12m = 6,4m.$ - (0,5)