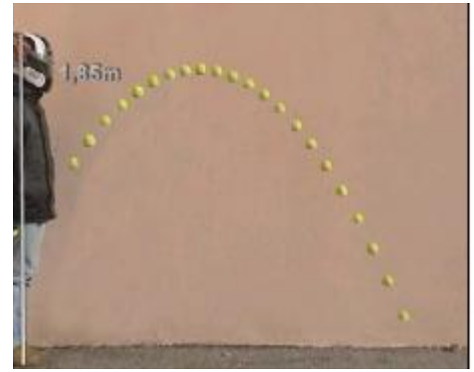
Mouvement horizontales الحركات المستوية

1) Etude expérimentale

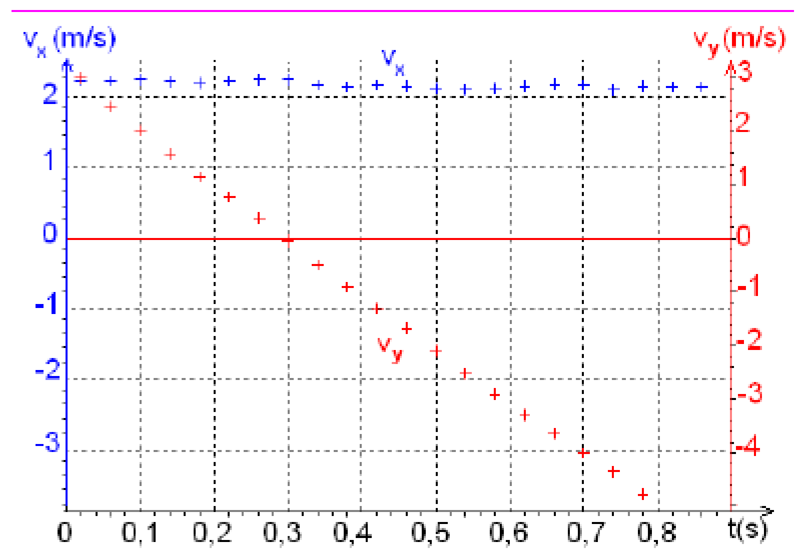
On envoie une balle avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$



L'étude des photos obtenues par une caméra numérique nous donne la courbe ci dessous

Vitesse

- sur Ox $v_x = 2,2$ m/s
- sur Oy $v_y = -10t + 3$
- mouvement uniforme suivant Ox et uniformément varié suivant oy



Accéleration

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$ay_x = \frac{dv_x}{dt} y = -10m/s^2$$

Donc $\overrightarrow{a_G} = -10\vec{j}$ ⟶ $\boxed{\overrightarrow{a_G} \approx \overrightarrow{g}}$

➢ Equations horaires du mouvement

$v_x = 2{,}2$ m/s ⟶ $x = 2{,}2\,t$ (en prenant $x_0 = 0$)

$v_y = -10t + 3$ ⟶ $y = -5t^2 + 3t$ (en prenant $y_0 = 0$)

➢ Equation de la trajectoire

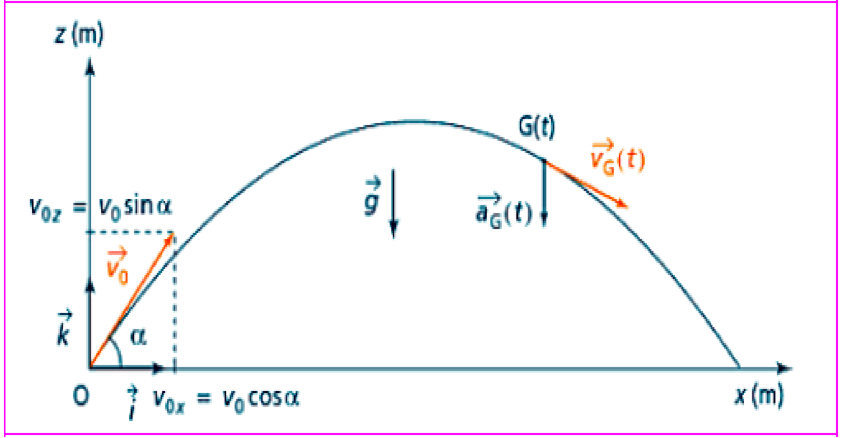
En éliminant t entre les deux équations précédentes on a $\boxed{y = -x^2 + 1{,}4\,x}$

Mouvement parabolique

2) Etude théorique

Repère d'étude $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'origine
Confondu avec le lieu d'envoie du projectile

On prend l'origine des temps l'instant de l'envoie



- ❖ Système étudie : projectile
- ❖ forces appliquées : $\vec{P} = m\vec{g}$
- ❖ Deuxième loi de Newton $m\vec{g} = m\vec{a}_G$ ⟶ $\boxed{\vec{a}_G = \vec{g}}$

Projetons cette relation sur les axes Ox et Oz

Sur Ox

$$a_x = \ddot{x} = 0 \longrightarrow v_x = constante = v_{0x} = v_0 \cos\alpha \longrightarrow x(t) = (v_0 \cos\alpha)t$$

Sur Oz

$$a_z = \ddot{z} = -g \longrightarrow v_z = -gt + v_0 \sin\alpha \longrightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t$$

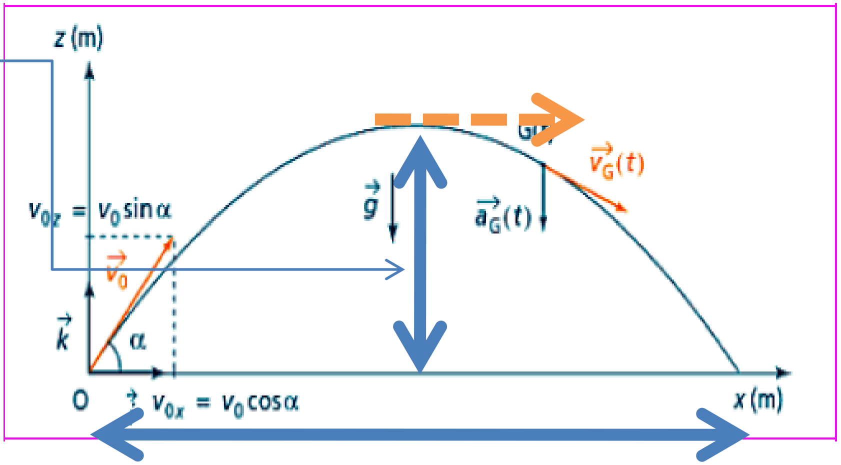
$\Longrightarrow$
- Mouvement uniforme suivant Ox
- Mouvement uniformément varié suivant Oz

3) Equation de la trajectoire

En éliminant le temps on obtient $\boxed{z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} \cdot x^2 + (\tan\alpha) \cdot x}$

Deux positions caractéristiques

La portée verticale



C'est la hauteur maximale atteinte par le projectile.
En ce point la vitesse du projectile est horizontale

Donc $v_z=0$ ⟶ $v_z = -gt + v_0 \sin\alpha \quad = 0$

On déduit donc le temps ts où le projectile atteint ce point $t_S = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

En utilisant l'équation de z(ts) = h on obtient $\boxed{h = \dfrac{{v_0}^2}{2g} \cdot \sin^2\alpha}$

La portée horizontale

C'est la distance d qui sépare l'origine du point de chute du projectile. Elle est définie par d = z = 0

$$\boxed{z = -\frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2 + (\tan\alpha) \cdot x} = 0 \longrightarrow d = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

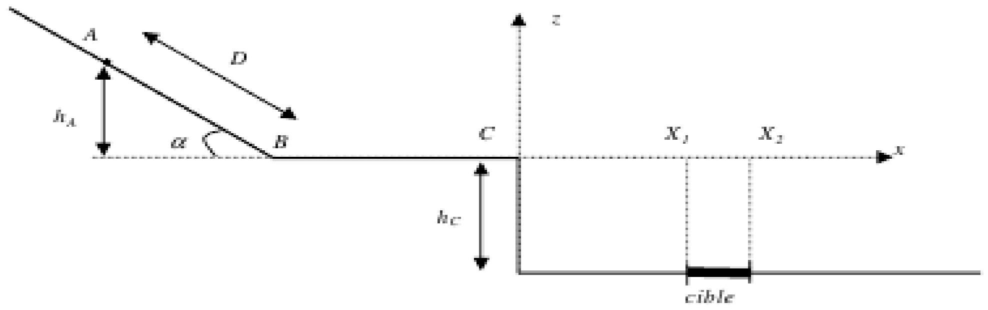
N.P d est max si $\sin 2\alpha = 1$ soit $\alpha = 45°$

Exercice

Le jeu schématisé ci-dessous consiste à placer un boulet sur un plan incliné de telle façon qu'il atteigne la cible.
Le boulet est tout d'abord lâché en A sans vitesse initiale.
Le système étudié est le boulet que l'on assimile à un point.
Toute l'étude est dans un référentiel galiléen.
On néglige les frottements dans tout l'exercice.

Données :

$\alpha = 30°$
$D = AB = 0{,}50$ m
$L = BC = 0{,}20$ m
$h_C = 0{,}40$ m
$m = 10$ g
$g = 9{,}8$ m.s^{-2}



1. ÉTUDE DU MOUVEMENT DU BOULET ENTRE A ET B.

1.1. Le système étudié est le boulet une fois lâché en A.
Faire l'inventaire des forces extérieures agissant sur le boulet. Représenter ces forces sur un schéma sans considération d'échelle.

1.2. On choisit l'altitude du point C comme référence pour l'énergie potentielle de pesanteur : $E_{PP} = 0$ pour $z_C = 0$.

1.2.1. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur au point A et vérifier qu'elle vaut $E_{PP}(A) = 2{,}5.10^{-2}$ J.

1.2.2. En déduire l'expression puis la valeur de l'énergie mécanique du système au point A.

1.2.3. En déduire la valeur de l'énergie mécanique du système au point B. Justifier la réponse.

1.3. Montrer que l'expression de la vitesse au point B est : $v_B = \sqrt{2g.D.\sin\alpha}$

2. ÉTUDE DE LA CHUTE DU BOULET APRÈS LE POINT C.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G du boulet après le point C.
L'origine des temps est prise lorsque le boulet est en C.
Le mouvement étant rectiligne et uniforme entre B et C, la vitesse en C est la même qu'en B :
$v_C = v_B = 2{,}2\ m.s^{-1}$

2.1. On précise que l'action de l'air est négligée.

2.1.1. Énoncer la deuxième loi de Newton.

2.1.2. Appliquer cette loi au boulet une fois qu'il a quitté le point C.

2.1.3. Déterminer l'expression des composantes du vecteur accélération en projetant la deuxième loi de Newton dans le repère Cxz (voir figure).

2.2. On rappelle que la valeur de la vitesse au point C est $v_C = 2{,}2\ m.s^{-1}$ et on précise que le vecteur vitesse au point C a une direction horizontale.

2.2.1. Déterminer l'expression des composantes du vecteur vitesse dans le repère Cxz.

L'expression des composantes du vecteur position dans le repère Cxz est :

$$\overrightarrow{CG}\begin{cases} x = (\sqrt{2g.D.\sin\alpha}).t \\ z = -\dfrac{1}{2}g.t^2 \end{cases}$$

2.2.2. En déduire l'équation de la trajectoire donnant l'expression de z en fonction de x.

2.3. On veut déterminer si le boulet atteint la cible E dont l'abscisse est comprise entre $X_1 = 0{,}55$ m et $X_2 = 0{,}60$ m.

2.3.1. Calculer le temps nécessaire pour que le boulet atteigne le sol.

2.3.2. En déduire l'abscisse X_f du boulet quand il touche le sol. La cible est-elle atteinte ?

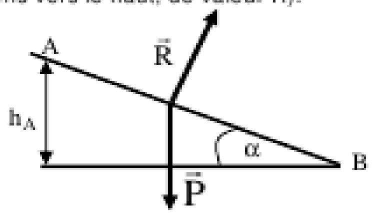
2.4. Quelle distance D faudrait-il choisir pour atteindre la cible à l'abscisse $X_f = 0{,}57$ m ? (la durée de chute étant la même).

1. ÉTUDE DU MOUVEMENT DU BOULET ENTRE A ET B.

1.1. On étudie le système **boulet** dans un référentiel **terrestre**, supposé **galiléen**.

Le boulet est soumis : à son **poids** $\vec{P}$ (de direction verticale, sens vers le bas, de valeur P = m.g)

à la **réaction** $\vec{R}$ du plan incliné (de direction perpendiculaire au plan car les frottements sont négligés, sens vers le haut, de valeur R).



1.2.1. $E_{PP}(A) = m.g.h_A$ et $h_A = D.\sin\alpha$ d'après la figure fournie $\boxed{E_{PP}(A) = m.g.D.\sin\alpha}$

$E_{PP}(A) = 0{,}010 \times 9{,}8 \times 0{,}50 \times \sin 30 = \mathbf{2{,}5 \times 10^{-2}\ J}$.

1.2.2. $E_m(A) = E_{PP}(A) + E_C(A)$ et la vitesse au point A est nulle donc $E_C(A) = 0$ J

$\boxed{E_m(A) = E_{PP}(A)}$ $E_m(A) = 2{,}5 \times 10^{-2}$ J.

1.2.3. Les frottements étant négligés au cours du mouvement **l'énergie mécanique se conserve.**

$\boxed{E_m(B) = E_m(A)}$ $E_m(B) = 2{,}5 \times 10^{-2}$ J.

1.3. $E_m(B) = E_m(A)$

$\frac{1}{2} m.v_B^2 + m.g.z_B = \frac{1}{2} m.v_A^2 + m.g.z_A$

avec $z_B = 0$ m, $v_A = 0$ m.s^{-1} et $z_A = h_A$

on obtient $\frac{1}{2} m.v_B^2 = m.g.h_A = m.g.D.\sin\alpha$

soit $\frac{1}{2} .v_B^2 = g.D.\sin\alpha$

$v_B^2 = 2g.D.\sin\alpha$

D'où $\boxed{v_B = \sqrt{2g.D.\sin\alpha}}$

2. ÉTUDE DE LA CHUTE DU BOULET APRES LE POINT C.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G du boulet après le point C.

L'origine des temps est prise lorsque le boulet est en C.

Le mouvement étant rectiligne et uniforme entre B et C, la vitesse en C est la même qu'en B : $v_C = v_B = 2{,}2$ m.s^{-1}

2.1. L'action de l'air est négligée.

2.1.1. <u>Deuxième loi de Newton</u>: Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est égale au produit de la masse du système par son accélération : $\sum \vec{F}_{ext.} = m.\vec{a}$

2.1.2. L'action de l'air étant négligée (ainsi que la poussée d'Archimède) seul le poids est appliqué au boulet $\sum \vec{F}_{ext.} = \vec{P} = m.\vec{g}$ donc $m.\vec{g} = m.\vec{a}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$

2.1.3. Compte tenu du repère Cxz choisi on a : $\vec{a}\begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases}$

2.2.1. À chaque instant : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ donc $a_x = \frac{dv_x(t)}{dt}$ et $a_z = \frac{dv_z(t)}{dt}$ donc en intégrant :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = Cte_1 \\ v_z(t) = -g.t + Cte_2 \end{cases}$$

Coordonnées du vecteur vitesse initiale $\vec{v}(0) = \vec{v}_C$: $\vec{v}_C\begin{cases} v_{Cx} = v_C = v_B \\ v_{Cz} = 0 \end{cases}$ alors $\begin{cases} Cte_1 = v_B \\ Cte_2 = 0 \end{cases}$

Finalement $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = v_B \\ v_z(t) = -g.t \end{cases}$

2.2.2 On donne: $\overrightarrow{CG}\begin{cases} x = (\sqrt{2g.D.\sin\alpha}).t \\ z = -\dfrac{1}{2}g.t^2 \end{cases}$

on isole t de l'expression de x : $t = \dfrac{x}{\sqrt{2.g.D\sin\alpha}}$

on reporte dans z : $z(x) = -\dfrac{1}{2}.g.\dfrac{x^2}{2.g.D.\sin\alpha}$

$\boxed{z(x) = -\dfrac{x^2}{4.D.\sin\alpha}}$ équation de la trajectoire.

2.3.1. Lorsque le boulet atteint le sol : $z = -h_c$ donc de l'expression $z = -\dfrac{1}{2}.g.t^2$ il vient $h_c = \dfrac{1}{2}.g.t^2$

alors $\boxed{t = \sqrt{\dfrac{2.h_c}{g}}}$

$t = \sqrt{\dfrac{2\times 0{,}40}{9{,}8}}$ = **0,29 s**

2.3.2. Quand le boulet touche le sol : $x = X_f$ et $z = -h_C$.

Utilisons l'équation de la trajectoire $z(x) = -\dfrac{x^2}{4.D.\sin\alpha}$ pour obtenir X_f.

$h_C = \dfrac{X_f^2}{4.D.\sin\alpha}$

$X_f^2 = 4.D.h_C.\sin\alpha$

$\boxed{X_f = 2.\sqrt{D.h_c.\sin\alpha}}$ (on ne retient pas la solution $X_f = -\ 2.\sqrt{D.h_c.\sin\alpha}$)

$\mathbf{X_f} = 2 \times \sqrt{0{,}50\times 0{,}40\times \sin 30}$ = **0,63 m**

X_f n'est pas compris entre X_1 = 0,55 m et X_2 = 0,60 m donc le boulet n'atteint pas la cible.

2.4. On repart de l'expression $h_C = \dfrac{X_f^2}{4.D.\sin\alpha}$ et on isole D.

$$\boxed{D = \dfrac{X_f^2}{4.h_c.\sin\alpha}}$$

$$D = \dfrac{0{,}57^2}{4\times 0{,}40\times \sin 30} = 0{,}41 \text{ m}$$

La valeur de D obtenue est inférieure à la valeur initiale 0,50 m ce qui est cohérent pour que le boulet atteigne la cible.